

Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[T1] Algoritmo dual simplex

Con la finalidad saber cómo se aplica el *algoritmo dual simplex*, se propone mencionar y describir su procedimiento en los pasos siguientes.

[T2]Paso 1: Convertir el modelo típico de maximización si este está en típico modelo de minimización

Cabe señalar que esto solo es una recomendación y no es necesario hacerlo.

[T2]Paso 2: Convertir las desigualdades del tipo ≥ en desigualdades del tipo ≤ multiplicando por -1

[T2]Paso 3: Expresar el modelo de programación lineal en la forma estándar introduciendo variables de holgura

Obtenerla solución inicial básica (no factible) y expresar esta información en la tabla simplex.

[T2]Paso 4: Condición de optimalidad. Probar la naturaleza de los elementos $c_j - z_j$

• **Caso (i):** Si todos los $c_j - z_j \leq 0$ y todas las $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, entonces la solución actual es una solución básica factible óptima.

• **Caso (ii):** Si todos los $c_j - z_j \leq 0$ y al menos una $x_{B_i} < 0$, entonces la solución actual no es una solución básica factible óptima. Ir al paso 5.

• **Caso (iii):** Si cualquier $c_j - z_j > 0$, entonces el algoritmo falla.

[T2]Paso 5: Condiciones de factibilidad

(i) Variable saliente. La variable saliente es la variable correspondiente al valor más grande negativo de x_{B_i} . Sea x_k la variable saliente.

(ii) Variable entrante. Calcular el cociente entre el renglón $(c_j - z_j)$ y el renglón de la variable saliente; es decir, $\theta = mín\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{\hat{a}_{ik}}\right|, a_{ik} < 0\right\}$.

Considerar los cocientes solo con denominadores negativos. La variable entrante es la variable no básica correspondiente al cociente mínimo de θ . Si no hay tal cociente con denominador negativo, entonces el modelo tiene solución no factible. Es decir, el modelo es infactible.



[T2]Paso 6: Aplicar operaciones elementales por renglón como en el algoritmo simplex primal

Repetir el procedimiento hasta que la solución factible sea óptima, o bien haya una indicación de que no existe una solución factible

Referencias

http://books.google.com.mx/books?id=mNUjTXLuBS4C&pg=PP112&dq=dual+simplex+-method&hl=es&sa=X&ei=bwH1UYvvMIqo9gTjh4CIAg&ved=0CHQQ6AEwCQ#v=onepage&q=dual%20simplex%20method&f=false(modificado por el autor según la literatura).





Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Algoritmo de la gran M [T1]

Para tener una idea de cómo se aplica este algoritmo, se propone describirlo como se hace a continuación.

[T2]Paso 0: Diseño y construcción del MPLC

En este paso se aplica el procedimiento de modelación.

[T2]Paso 1: Estandarización del MPLC

Como se asume que el MPLC tiene la forma (19), (20) o (21), para llevar a cabo la estandarización del modelo, entonces se requiere agregar variables de holgura (en restricciones del tipo ≤), variables de excedencia (en restricciones del tipo ≥) y variables artificiales (en restricciones del tipo = y ≥). Una idea acerca delo mencionado antes, aplicado a los modelos (19), (20) y (21), está indicada en los modelos (22), (23) y (24), respectivamente.

$$\begin{aligned} &\textit{Máx } \mathbf{Z} = \mathbf{c^t x} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A_1 x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR_1} = \mathbf{b_1} \\ &\mathbf{A_2 x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b_2} \\ &\mathbf{A_3 x} + \mathbf{IR_2} = \mathbf{b_3} \\ &\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{Z} = \mathbf{c^t y} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A_1 y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR_1} = \mathbf{b_1} \\ &\mathbf{A_2 y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b_2} \\ &\mathbf{A_3 y} + \mathbf{IR_2} = \mathbf{b_3} \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{Z} = \mathbf{c^t y} + \mathbf{0t} + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{24}$$

Por lo que respecta a la función a optimizar para el **método de la gran M,** se requiere penalizar a la función objetivo. Esto es, si la función objetivo del MPLC es caso de mínimo, entonces se debe obligar a que el valor de la función objetivo inicie con un valor mucho muy grande positivo; es decirse debe dar la oportunidad que al aplicar la metodología simplex pueda lograr alcanzar su valor más pequeño posible, desde luego cumpliendo en todos los casos con las restricciones dadas. En caso contrario, si la función objetivo del MPLC es caso de máximos, entonces se debe obligar a que el valor de la función objetivo inicie con un valor negativo muy grande; es decir, le damos la oportunidad que al aplicar la metodología simplex pueda lograr alcanzar su valor más grande posible, desde luego cumpliendo en todos los casos con las restricciones dadas. Por lo que la mencionada penalización se hace con base en el criterio siguiente:



- Caso mínimos: $+M\mathbf{R}$; con $M >>> 0$ (M un valor mucho muy grande positivo).
- Caso máximos: $-M\mathbf{R}$; con $M >>> 0$ (M un valor mucho muy grande positivo).

De este modo, la penalización para el caso de los modelos (4), (5) y (6), quedarían expresados según los modelos (7), (8) y (9), respectivamente.

$$\begin{aligned}
&Máx\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{x} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} - M\mathbf{R}_1 - M\mathbf{R}_2\\
&\mathbf{s.a}\\
&\mathbf{A}_1\mathbf{x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2\\
&\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3\\
&\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + \mathbf{0s} + M\mathbf{R}_1 + M\mathbf{R}_2\\
&\mathbf{s.a}\\
&\mathbf{A}_1\mathbf{y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2\\
&\mathbf{A}_3\mathbf{y} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3\\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&Mín\ \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} + \mathbf{0t} + M\mathbf{R}\\
&\mathbf{s.a}\\
&\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b}\\
&\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \quad M >>> 0
\end{aligned} \tag{27}$$



[T2]Paso 2: Hallar una SIBF

Una vez que se ha estandarizado el MPLC, se requiere escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos) y de esta forma obtener una SIBF de manera muy simple, como se aplica para el caso de los modelo (25), (26) y (27).

[T2]Paso 3: Tabla simplex inicial

Este paso tiene como finalidad usar los coeficientes del MPLC estandarizado y presentarlos en un arreglo tabular (aunque no sea necesario), conocido como tabla simplex inicial. Por ejemplo, si tuviéramos el modelo estandarizado como el (27), entonces su tabla simplex inicial quedaría representada como se muestra en la tabla 1.

[ENTRA TABLA 1]
Tabla 1

C_j		$C_N{}^t0$	$C_B{}^t$		
C_B	VB	Yt	R	LD	θ
C_B	R	A- I	I	b	
$C_j - Z_j$	Z	$(C_N{}^t - C_BA)$ $(0 + C_BI)$	$(C_B{}^t - C_BI)$	C_Bb	

[TERMINA TABLA 1]

[T2]Paso 4: Prueba de optimalidad

Aquí se trata de investigar si se cumple con el criterio de optimalidad, considerando de antemano que si la función a optimizar es de:

- Mínimos, el criterio de optimalidad consiste en que se verifique: $c_j - z_j = c_j - \mathbf{C}_B^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_j \geq 0$, $\forall\ j \in VNB$ (variables no básicas).
- Máximos, el criterio de optimalidad consiste en que se verifique: $c_j - z_j = c_j - \mathbf{C}_B^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_j \leq 0$, $\forall\ j \in VNB$ (variables no básicas).

Si se cumple con el criterio de optimalidad, entonces termina la aplicación del algoritmo y se concluye diciendo que la solución básica factible hallada es óptima. En otro caso, ir al paso 5.



[T2]Paso 5: Variable entrante

Como se describió en la metodología simplex, si se trata de una función objetivo de máximos, se elige el $c_j - z_j >>> 0$, es decir el valor más grade positivo de las variables no básicas. Ahora bien, si la función objetivo es caso de mínimos, se elige el $c_j - z_j <<< 0$, esto es, el valor más grande negativo de las variables no básicas.

[T2]Paso 6: Variable saliente

De igual forma, como se describió en el algoritmo simplex, la variable saliente se elige con base en la aplicación de la regla del mínimo cociente, es decir:

$$\theta_r = mín\left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}},\ con\ \hat{b}_i \geq 0,\ \hat{a}_{ij} > 0 \right\}$$

Si se usa el arreglo tabular, se colocan los valores de los cocientes en la columna θ, como se describió en el algoritmo simplex.

[T2]Paso 7: Pivotear

Detectado el divisor que aportó el mínimo cociente (pivote), que es el elemento que se intercepta con la columna de la variable entrante y el reglón de la variable saliente,sieste no tiene valor unitario, entonces se aplica la operación elemental por reglón $M_i(\frac{1}{c}),\ c \neq 0$, donde es el divisor que aporta el mínimo cociente.
Posteriormente, se aplican operaciones elementales por renglón $A_{ij}(d),\ d \neq 0$, con la finalidad de generar ceros por arriba y por debajo del elemento pivote, con el objetivo de hallar la nueva solución básica factible o el nuevo punto extremo.
Recuérdese que si hay variable entrante, pero no hay variable saliente, se tiene que concluir que el **modelo es no acotado**, como se estudió en los casos de algoritmo simplex.

[T2]Paso 8: Regresar al paso 4

Invariablemente, cada vez que se concluye el paso 7, se debe regresar al paso 4.

[T2]Paso 9: Generar la solución óptima ($\mathbf{x}_\mathbf{B}^*$) y el valor óptimo de la función objetivo (Z^*)

Sabiendo de antemano que se ha cumplido con el criterio de optimalidad, se puede proporcionar la solución óptima y el valor de la función objetivo, de acuerdo con lo que se estudió en el método simplex. Es decir, tenemos como salida a $\mathbf{x}_\mathbf{B}^*$ y $\mathbf{z}^*$, si es caso máximo o $\mathbf{y}_\mathbf{B}^*$ y $\mathbf{w}^*$, si es caso mínimo.



[T2]Referencias

http://books.google.com.mx/books?id=UAIjILBeoQgC&pg=PA47&dq=big+m+method&hl=es&-sa=X&ei=KKfxUdr2FYj29gS8nYGADQ&sqi=2&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q=big%20m%20method&f=false





[T1] Algoritmo del método de las dos fases

Para tener una idea de cómo se aplica este método, el algoritmo se describe en los pasos siguientes.

[T2]Paso 0: Diseño y construcción del MPLC

En este paso se aplica el procedimiento y la metodología de modelación que, se asume, se estudiaron con anterioridad, y cuya finalidad es obtener como producto el MPLC. Cabe señalar que el modelo que se obtiene puede tener cualquier forma de representación, como:

$$\begin{aligned} &\textit{Máx } \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{y} \geq \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{y} = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{Z} = \mathbf{c}^t\mathbf{y} \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}\mathbf{y} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (3)$$

[T2]Paso 1: Estandarizar el modelo de fase I

La estandarización del modelo de fase I consiste en agregar variables de holgura (en restricciones del tipo $\leq$), variables de excedencia (en restricciones del tipo $\geq$) o variables artificiales (en restricciones del tipo =), con la finalidad de escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos). La función objetivo de fase I, como se mencionó arriba, siempre es caso de mínimos, expresada como la suma de todas las variables artificiales que contenga dicho modelo de fase I;esdecir:

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{x} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned} &\textit{Mín } \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{A}_1\mathbf{y} - \mathbf{It} + \mathbf{IR}_1 = \mathbf{b}_1 \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{y} + \mathbf{Is} = \mathbf{b}_2 \\ &\mathbf{A}_3\mathbf{y} + \mathbf{IR}_2 = \mathbf{b}_3 \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (29)$$



$$\begin{aligned} &Mín\ \mathbf{r} = \mathbf{R} + \ldots \\ &\mathbf{s.a} \\ &\mathbf{Ay} - \mathbf{It} + \mathbf{IR} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (30)$$

[T2]Paso 2: Hallar una SIBF

Una vez que se ha estandarizado el MPLC, se requiere escribir el modelo con cada una de sus restricciones en forma de igualdad (hiperplanos) y de esta forma obtener una SIBF de manera muy simple, como se aplica para el caso de los modelo (28), (29) o (30).

[T2]Paso 3: Tabla simplex inicial del modelo de fase I

Este paso tiene como finalidad usar los coeficientes del modelo estandarizado de fase I y presentarlos en un arreglo tabular (que no es necesario), conocido como tabla simplex inicial. Por ejemplo, si tuviéramos un modelo estandarizado como el modelo (6), su tabla simplex inicial quedaría representada como se muestra enla tabla 1.

[ENTRA TABLA 1]
Tabla 1

C_j		$C_N^t 0$	C_B^t		
C_B	VB	Yt	R	LD	θ
C_B	R	A - I	I	b	
$C_j - r_j$	r	$(C_N^t - C_B A)$ $(0 + C_B I)$	$(C_B^t - C_B I)$	$C_B b$	

[TERMINA TABLA 1]

[T2]Paso 4: Prueba de optimalidad

De lo que se trata aquí es de investigar si se cumple con el criterio de optimalidad; en otras palabras, verificar que:

$c_j - r_j = c_j - \mathbf{C}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j \geq 0\ ,\ \forall\ j \in VNB$. (Recuérdese que la función a optimizar de fase I es caso mínimo). Si se cumple, entonces se debe parar; pues, en este caso, la solución básica factible hallada es óptima. En caso contrario, ir al paso 5.



[T2]Paso 5: Variable entrante

Como se describió en el algoritmo simplex, si la función a optimizar es de mínimos, se elige la variable entrante con el $(c_j - r_j)$ más grande negativo para todo j de las variables no básicas. Es decir, $(c_j - r_j) <<< 0$ y $\forall \; j \in VNB$. Cabe señalar que $(c_j - r_j) <<< 0$ es denominado indicador (ya sea para caso mínimos o para caso máximos).

[T2]Paso 6: Variable saliente

Igual al paso 6 del algoritmo de la gran M.

[T2]Paso 7: Pivotear

Igual al paso 7 del algoritmo de la gran M.

[T2]Paso 8: Regresar al paso 4

Cada vez que se termine el paso 7, invariablemente se debe regresar al paso 4. Recuérdese que aunque se cumpla el criterio de optimalidad, si el valor óptimo de la función objetivo es distinta de cero (r ≠ 0), entonces el modelo de fase I es infactible y también el MPLC original lo será; es decir, el conjunto intersección es el conjunto vacío. Debido a esto no es posible aplicar la fase II, por lo que se concluiría diciendo: “El MPLC original es infactible”. En otro caso, ir al paso 4.

[T2]Paso 9: Generar la solución óptima ($\mathbf{x}_B^*$) y el valor óptimo de la función a optimizar (Z^*)

Igual al paso 9 del algoritmo de la gran M.



Algoritmo del método simplex [T1]

[T2]Paso 1: Modelación del problema

Dado el enunciado de un problema de programación lineal, se realiza la modelación de este y se asume que dicho modelo tiene la forma canónica caso de máximos.

[T2]Paso 2: Estandarización del modelo

Por este paso se trata de expresar el MPLC en forma estándar caso máximos; para lograrlo, solo basta con agregar una variable de holgura distinta en cada una de las restricciones del tipo ≤. Para no afectar la función objetivo, los respectivos coeficientes de estas variables en dicha función son cero.

[T2]Paso 3: Determinación de una SIBF

Aquí seasume que el MPLC en su forma estándar tiene m restricciones y n variables, así que para hallar una SIBF basta con hacer (n–m) iguales a cero. Por lo que se tendrán (n–m) variables no básicas y m variables básicas.

[T2]Paso 4: Presentación de la SIBF en un tabla simplex inicial
Una vez que se ha determinado la SIBF, se procede a representar dicha solución en un arreglo tabular, según la forma de Tucker, que podría ser como se presenta en la tabla 1.

Tabla 1 Arreglo tabular de Tucker

C_j		C_N^t	C_B^t	LD
C_B	VB	N	B	X_B
$C_j - Z_j$	Z	$C_j - Z_j$	$C_j - Z_j$	$C_B^t X_B = Z^*$

Donde:

$\mathbf{c}_B^t$: Sub-matriz transpuesta de coeficientes de variables básicas en función a optimizar.
$\mathbf{c}_N^t$: Sub-matriz transpuesta de coeficientes de variables no básicas en función a optimizar.
$\mathbf{B}$: Sub-matriz de coeficientes de variables básicas.
$\mathbf{N}$: Sub-matriz de coeficientes de variables no básicas, siendo de orden.
VB: Matriz de variables básicas.
$\mathbf{x}_B$: Sub-matriz de solución (LD) de variables básicas.



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[T2]Paso 5: Revisión del criterio de optimalidad

Dado que el MPLC es de caso máximo, entonces el criterio de optimalidad consiste en que se cumpla:

$$(c_j - z_j) = c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_\mathbf{j} \leq 0 \quad \forall \ j \in VNB$$

Si se cumple el criterio de optimalidad, entonces se concluye afirmando que se llegó a la solución óptima (punto factible óptimo), la cual aparece en la columna de LD ($\mathbf{x}_\mathbf{B}$). Y para el valor óptimo de la función a optimizar, es el que aparece en $C_B{}^tX_B$; que es Z^*. En caso de no cumplirse, se debe seguir al paso 6.

[T2]Paso 6: Elegir la variable entrante

Este paso se aplica solo debido a que no se cumplió el criterio de optimalidad; es decir, debe existir al menos un $c_j - z_j > 0 \quad \forall \ j \in VNB$. Suponiendo que haya más de un elemento $c_j - z_j > 0$, entonces la variable x_j entrante se elige con aquel $c_j - z_j >>> 0$; es decir, aquella x_j entrante que proporcione el valor más grande positivo. Suponga que esa variable x_j entrante ocurrió en la variable $x_e = x_k$.

[T2]Paso 7: Revisión de criterio de factibilidad (variable saliente)

La variable que sale del conjunto de variables básicas se obtiene aplicando el *criterio de la razón o regla del mínimo cociente:*

$$\theta_r = \underset{1 \leq i \leq m}{mín}\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\hat{a}_{ik}} ; \ \hat{a}_{ik} > 0 \right.$$

Donde:

$\bar{b}_i$: i-ésimo LD de la actualización de $\bar{\mathbf{b}}$.

$\hat{a}_{ik}$: i-ésimo componente de la columna $\hat{\mathbf{p}}_k$.

[T2]Paso 8: Definir el pivote y pivotear

El pivote es el elemento que se encuentra en la intersección de la columna de la variable entrante y el reglón de la variable saliente. Pivotear consiste en transformar en la unidad al pivote, para luego generar ceros por arriba y por abajo del elemento pivote (excepto en el renglón Z).



[T2]Paso 9: Actualizar la columna de variables básicas y la de coeficientes básicos

Una vez que se sabe qué variable entró y qué variable salió, se procede a realizar la actualización mediante el criterio siguiente: colocar la variable entrante en el lugar de la variable saliente.

Enseguida, se lleva a cabo la actualización de los coeficientes básicos, aplicando este criterio: buscar el coeficiente de la variable entrante, según como se tiene en el modelo estandarizado.

[T2]Paso 10: Regresar al paso 5

Una vez que se aplicó el paso 9, se regresa al paso 5.

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Anexo A

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD [T1]

Antes de iniciar con el estudio del análisis de sensibilidad, primero es necesario que el lector esté familiarizado con al menos uno de los algoritmos siguientes: simplex, gran M, dos fases y dual simplex.

En la secciones dedicadas al estudiado de los algoritmos mencionados, se hizo mención, en el principio de certidumbre, que todos los coeficientes o parámetros (función a optimizar, matriz de coeficientes tecnológicos y lados derechos) que influyen en cada modelo son constantes.

Además, en estas mismas secciones se enfatizó en el hecho de que en la práctica es común que algunos parámetros de la matriz de coeficientes tecnológicos, de lados derechos o de la función a optimizar sean estimaciones de parámetros desconocidos, sin embargo se les incluye en el problema como si fueran los valores reales de los parámetros. De este modo, el modelo se resuelve a través de la aplicación de alguno de los algoritmos mencionados. No obstante, como estos parámetros solo se consideran estimaciones, se requiere llevar a cabo un análisis acerca de cómo se afectaría la solución obtenida, si estos parámetros tuvieran valores distintos a los considerados. Cuando se lleva a cabo esto, precisamente se le conoce como análisis de sensibilidad.

Así, el análisis de sensibilidad en la programación lineal continua se relaciona con la cuantificación de los efectos en la solución óptima, debido a los cambios en algunos parámetros del modelo de programación lineal continua (MPLC).

Así, al llevar a cabo este análisis de sensibilidad, es posible responder preguntas como:

1. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, un cambio en uno de los coeficientes de la función a optimizar?

2. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, un cambio en el valor del lado derecho de una restricción?

3. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, que se agregue una nueva variable de decisión al modelo?

4. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, que se agregue una nueva restricción al modelo?

5. ¿Cómo afecta a la solución óptima y al valor óptimo de la función a optimizar, cuando se cambia algún coeficiente en una columna de la matriz de coeficientes tecnológicos?



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

A continuación, se presenta una interpretación geométrica (en el plano cartesiano) para cada pregunta:

Cambio en un coeficiente de función a optimizar [T2]

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 4 \qquad \text{con} \quad x_1, x_2 \ge 0$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 18$$

Por tanto, el conjunto poliédrico asociado a este modelo es el que está achurado con línea en color verde, cuya figura geométrica es un trapecio (véase figura A.1). Cabe señalar que las rectas de la función a optimizar son las que están en línea discontinua en color rojo.

[ENTRA FIGURA A.1]

[ENTRA PIE DE FIGURA A.1]

Figura A.1

[TERMINA FIGURA A.1]



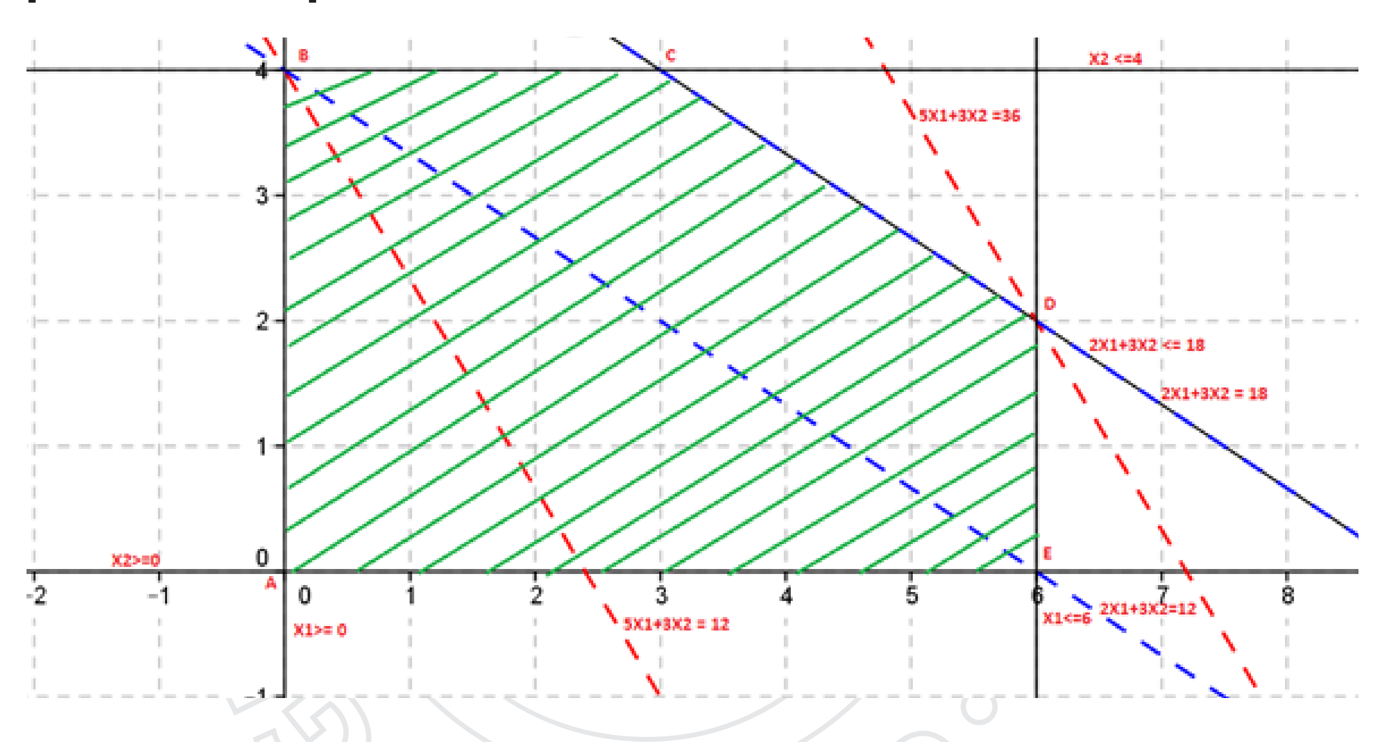
Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Ahora, supóngase que cambia el coeficiente de la variable X_1 en la función a optimizar, y cambia de 5 a 3. Así, la función a optimizar queda:

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

Con base en lo anterior, la recta de la función a optimizar se ve como en la figura A.2.

[ENTRA FIGURA A.2]



[ENTRA PIE FIGURA A.2]

Figura A.2

[TERMINA FIGURA A.2]



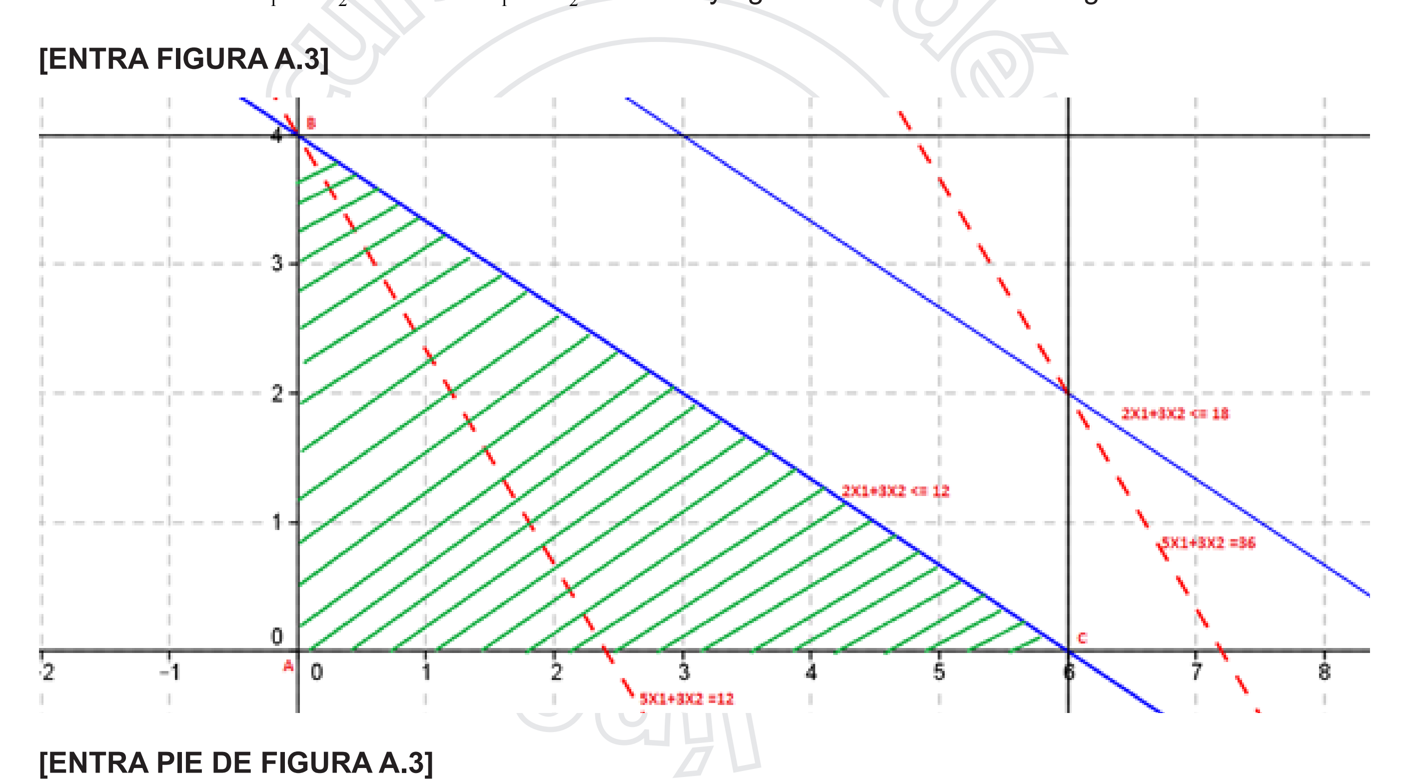
Como se puede observar en la figura, cuando se cambia a un coeficiente de la función a optimizar, la pendiente también cambia, tal como se muestra arriba, donde la nueva recta con línea discontinua está en color azul, mientras que la que está en color rojo es la del modelo original.

Además, como se puede apreciar, con este cambio se presenta el caso de soluciones óptimas múltiples (puntos extremos *C* y *D*), mientras que con modelo original solo se tiene el punto extremo óptimo *D*. Por tanto, en términos generales, se puede mencionar que la solución óptima no cambia, pues solo cambia el valor óptimo de función a optimizar de 36 a 18.

Cambio en el LD de una restricción [T2]

A continuación, se continúa con el uso del modelo que se supuso antes, haciendo en la tercera restricción. De $2x_1 + 3x_2 \leq 18$ a $2x_1 + 3x_2 \leq 12$. Cuya gráfica se muestra en la figura A.3.

[ENTRA FIGURA A.3]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.3]

Figura A.3

[TERMINA FIGURA A.3]



Como se observa en la gráfica de la figura, al reducir el valor del *LD* de la restricción ($2x_1 + 3x_2 \leq 12$), el área del conjunto poliédrico también se ve reducida; debido a esto, cambiará la solución óptima y, por ende, el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, cuando dicha restricción se mantiene sin cambios el área del conjunto poliédrico también lo hace ($2x_1 + 3x_2 \leq 18$).

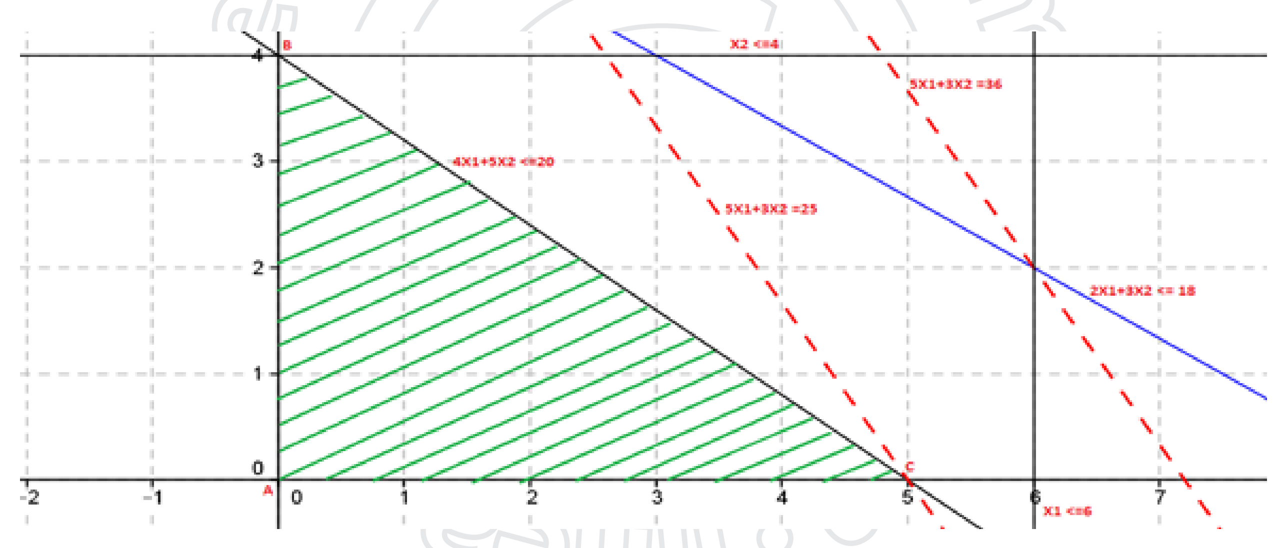
Agregar una nueva restricción al modelo[T2]

En este caso, se asume que al modelo original se le agregará una nueva restricción:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

Para responder a cada una de estas preguntas, se hace en cada uno de los subtemas que se desarrollan a continuación.

[ENTRA FIGURA A.4]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.4]

Figura A.4

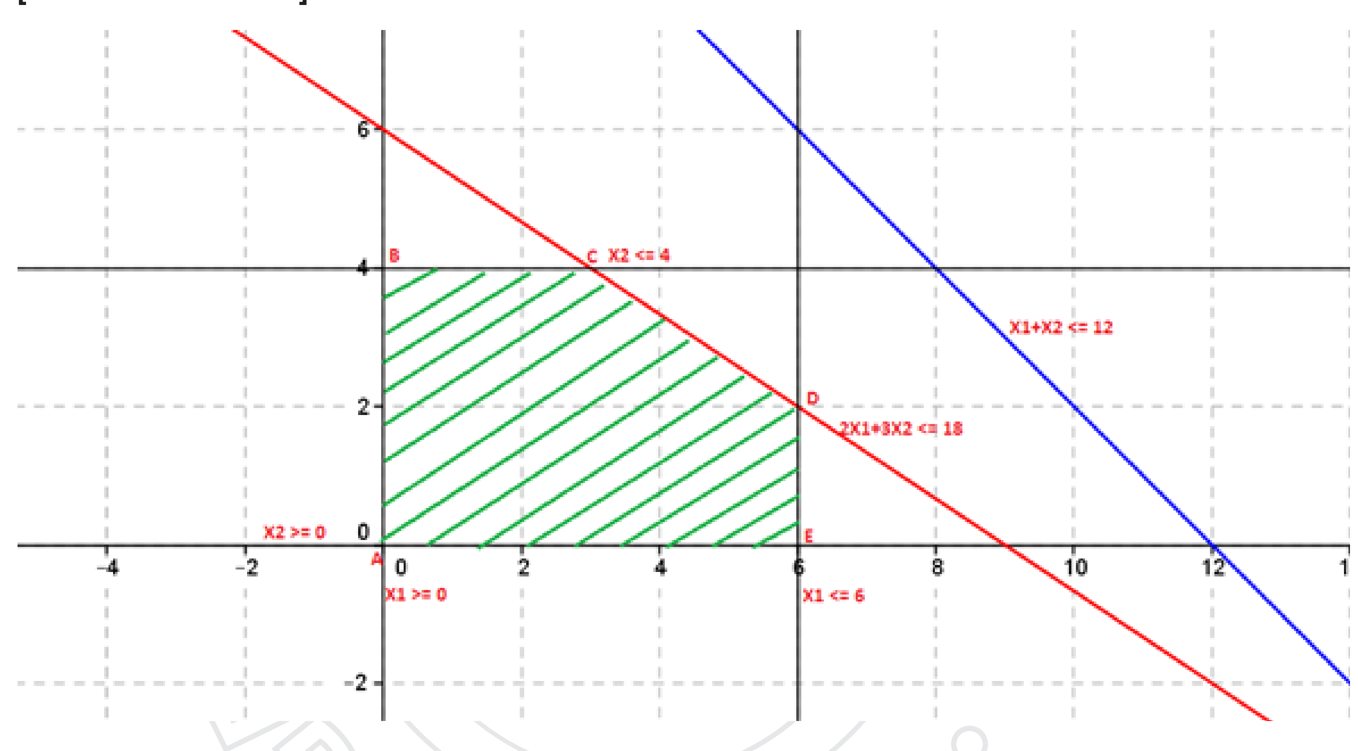
[ENTRA FIGURA A.4]



Como se observa, en este caso (véase figura B.4) el área del conjunto poliédrico se ve reducida, motivo por el cual cambiarán tanto la solución como el valor de la función a optimizar.

Cabe señalar que puede tenerse otra situación: al modelo original se le agrega la nueva restricción: $x_1 + x_2 \leq 12$, cuya gráfica se muestra en la figura A.5.

[ENTRA FIGURA A.5]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.5]

Figura A.5

[TERMINA FIGURA A.5]

Como se ve en la figura A.5, la nueva restricción no influye en modificar el área del conjunto poliédrico; por tanto, debido a que se agrega esta nueva restricción, no cambia la solución óptima ni el valor óptimo de la función a optimizar.

Cambio en algún coeficiente de la columna de coeficientes tecnológicos[T2]

Recuérdese que el MPLC original es:

$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 18$$

con $x_1, x_2 \ge 0$

Ahora, supóngase que se hace el cambio en la segunda columna de la matriz de coeficientes tecnológicos; esto es, la segunda columna original de dicha matriz es: $\mathbf{p}_2^t = (0\ 0\ 3)$ y la modificación de esta columna sería: $\mathbf{p}_2^{t'} = (0\ 0\ 2)$. Por consiguiente, el MPLC cambia a:

$$Max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$s.a$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 18$$

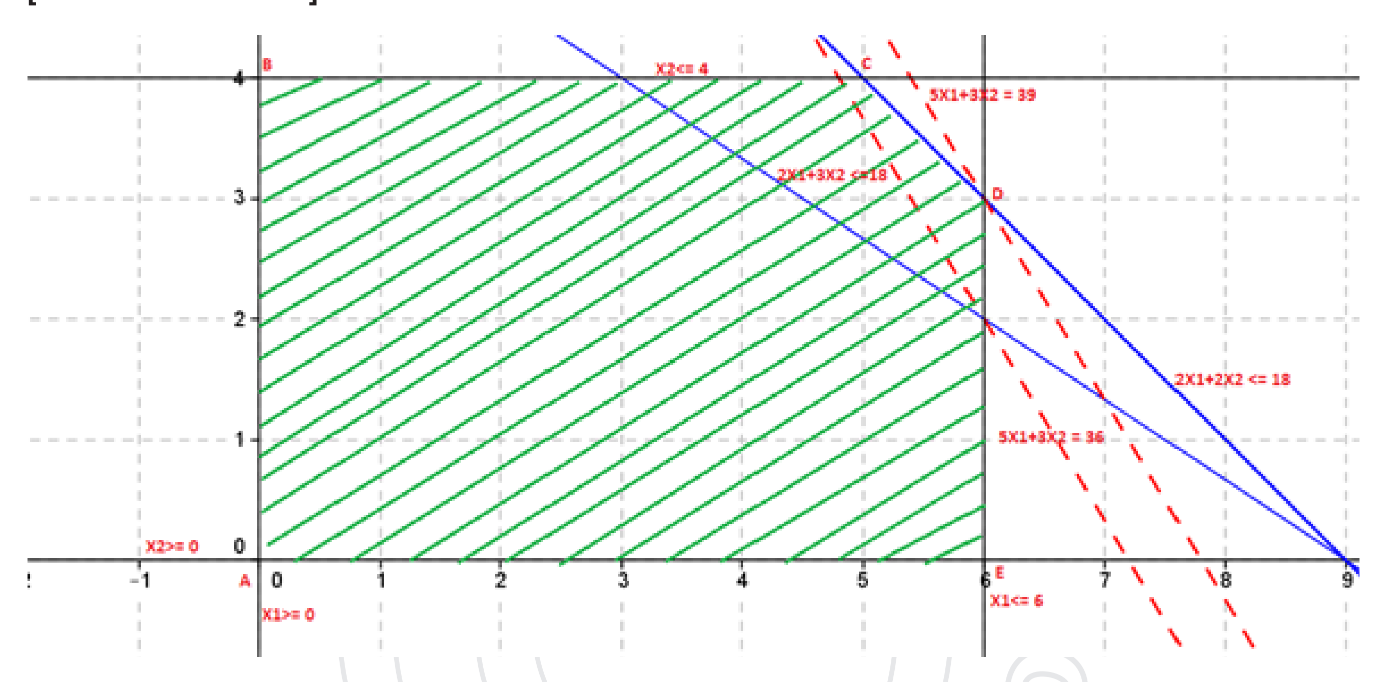
con $x_1, x_2 \ge 0$

De manera geométrica, la nueva área del conjunto poliédrico queda como se muestra en la figura A.6.



De manera geométrica, la nueva área del conjunto poliédrico queda como se muestra en la figura A.6.

[ENTRA FIGURA A.6]



[ENTRA PIE DE FIGURA A.6]

Figura A.6

[TERMINA FIGURA A.6]

Como se puede observar en la figura A.6, al realizar la modificación en esa columna, el área del conjunto poliédrico crece y cambian la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar.

En estos cuatro casos que se ha hecho énfasis en el aspecto gráfico, se puede mencionar que cuando se cambia algún parámetro del modelo, también pueden cambiar la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, para un MPLC que contengan más de dos variables, no es tan fácil realizar la interpretación desde el punto de vista gráfico. Por lo que resulta indispensable llevar a cabo un análisis algebraico de los casos que se mencionan a continuación:

- **Caso 1:** Análisis de sensibilidad en un coeficiente de función a optimizar.
- **Caso 2:** Análisis de sensibilidad en un LD de una restricción.
- **Caso 3:** Análisis de sensibilidad cuando se agrega una nueva variable.



• **Caso 4:** Análisis de sensibilidad cuando se agrega una nueva restricción.

• **Caso 5:** Análisis de sensibilidad cuando hay cambio en un coeficiente de una columna de la matriz de coeficientes tecnológicos.

A continuación se presenta el desarrollo algebraico que soporta el análisis de sensibilidad en un MPLC.

Análisis de sensibilidad en un coeficiente de la función a optimizar [T2]

Antes de iniciar el estudio de este subtema, es conveniente que el lector recurra a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex. El análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo, consiste en analizar la repercusión que sobre la solución óptima tienen las variaciones de los parámetros C_j. Dado que como se revisó en la interpretación geométrica, este cambio hace que también se modifiqué la pendiente de la recta la función objetivo. Luego, si la modificación es suficientemente grande, la solución óptima puede pasar a ser otro punto extremo de la región factible (conjunto poliédrico). Por tanto, la modificación de los parámetros C_j puede afectar la optimalidad de la solución del modelo original, pero nunca influirá en la factibilidad de la misma.

El análisis de sensibilidad para la función objetivo consiste en conocer:

a) Los rangos en que pueden fluctuar los costos (utilidad) para las variables que tengan que modificar la base.

b) Cómo cambia la base fuera de esos rangos.

c) En cuanto se modifica la función objetivo.

Por el momento supóngase que se tiene el modelo de programación lineal de la forma:

$$\begin{aligned} &Max \quad z = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &s.a. \qquad\qquad \text{con} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (1) \\ &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Además, asúmase que se ha encontrado su solución óptima; por tanto, si se desea llevar a cabo el análisis de sensibilidad en algún coeficiente de una variable de decisión en función objetivo, entonces podemos determinar el intervalo de optimalidad si se supone que la base actual continua óptima, es decir, que la matriz inversa de variables básicas y la solución óptima aún permanecen óptimas. De este modo, considérese que llevamos a cabo el análisis de sensibilidad en el coeficiente de la variable *i*-ésima de la función objetivo, así que deseamos hallar el intervalo de optimalidad para que esta base aún permanezca óptima; para ello, entonces, podríamos calcular los elementos $c_j - z_j \ \forall \ j \in VNB$ y, como supusimos al inicio de que el MPLC es caso máximos, entonces todos los elementos $c_j - z_j$ deben ser menores que cero, es decir: $c_j - z_j < 0$

En el ejemplo que se resuelve a continuación no se detalla la aplicación del algoritmo simplex, debido a que esto se realizó en otro apartado.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$\begin{aligned} &Max \ z = 3x_1 + 2x_2 \\ &s.a. \qquad\qquad \text{con} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ &3x_1 + x_2 \leq 48 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 36. \end{aligned}$$



Solución

En este caso, se asume que el modelo ha sido estandarizado, por lo que primero debemos aplicar el algoritmo simplex, al generar las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima (véase tabla A.1).

[ENTRA TABLA A.1]

Tabla A.1 Tabla simplex inicial

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
$C_j - z_j$	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.1]

En tanto, la tabla de la primera iteración se muestra en la tabla A.2.

[ENTRA TABLA A.2]

Tabla A.2 Primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
$C_j - z_j$	Z	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.2]

La tabla de la segunda iteración se muestra en la tabla A.3.



[ENTRA TABLA A.3]

Tabla A.3 Segunda iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	12	
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	12	
C_j - z_j	Z	0	0	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.3]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima:

$$\mathbf{x}_B^* \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Y de la tabla óptima se obtiene que la matriz inversa de variables básicas es:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, supongamos que se desea hallar el intervalo de optimalidad para c_1. Por tanto, tenemos que determinar los $c_j - z_j \ \forall \ j \in VNB$, que para nuestro caso $j = 3,4$, dado que para cuando $j = 1,2$ son para las variables básicas.

Para *j = 3*

$$c_3 - z_3 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(2c_1 - 2)$$

Para *j* = *4*

$$c_4 - z_4 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (c_1 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-c_1 + 6)$$

Ahora bien, para que estas cumplan con la prueba de optimalidad se tiene que satisfacer:

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(2c_1 - 2) < 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 > 1$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-c_1 + 6) < 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 < 6$$

Así que $c_1 \in (1;6)$ es el intervalo de optimalidad.

Por otro lado, debemos asumir que se desea hallar el intervalo de optimalidad para c_2. De este modo, tenemos que determinar los $c_j - z_j \;\; \forall \;\; j \in VNB$, que para este caso es $j = 3,4$. $j = 3,4$, dado que para cuando $j = 1,2$ son para las variables básicas.

Para *j* = *3*

$$c_3 - z_3 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(6 - c_2)$$

Para *j* = *4*

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad c_2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-3 + 3c_2)$$

Ahora bien, para que se satisfaga con el criterio de optimalidad se tiene que cumplir:

$$c_3 - z_3 = -\tfrac{1}{5}(6 - c_2) < 0 \;\Rightarrow\; c_2 < 6$$

$$c_4 - z_4 = -\tfrac{1}{5}(-3 + 3c_2) < 0 \Rightarrow\; c_2 > 1$$

Así que $c_2 \in (1;6)$ es el intervalo de optimalidad.

Para comprobar este resultado, se usa el software Lindo, cuyo modelo codificado es:

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=36

END
```

La salida que proporciona LINDO es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 60.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	12.000000	0.000000
X2	12.000000	0.000000



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NÚM. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	3.000000	3.000000	2.000000
X2	2.000000	4.000000	1.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW RHS	CURRENT INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	ALLOWABLE
2	48.000000	60.000000	30.000000
3	36.000000	60.000000	20.000000

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Al comparar los intervalos, se puede observar que estos coinciden.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad en un lado derecho[T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.



Considérese el efecto de cambiar un coeficiente en el lado derecho (LD). Supóngase que se cambia el valor de la *i*-ésima restricción, si b_i a $b_i + \delta_i$ de este modo, el vector *b* cambia a $\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ es el vector unitario con 1 en su *i*-ésima componente y 0 en las demás.

Considérese el MPLC como en (1) y supóngase que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x_B^* = B^{*-1}b$. Si deseamos llevar a cabo el análisis de sensibilidad en el lado derecho de la i-ésima restricción, significa que deseamos determinar el intervalo o el rango de valores para que la solución óptima actual aún permanezca óptima (un supuesto necesario para este análisis). Para tal efecto, primero suponemos una pequeña perturbación en el lado derecho de la i-ésima restricción; es decir, suponemos que $\Delta\mathbf{b}_i$ es la perturbación que se hace en el lado derecho de la *i*-ésima restricción. Entonces , la nueva solución (solución con perturbación), denotada como $\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'}$, deberá cumplir el criterio de factibilidad Esto es:

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{B}^{*-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_i) \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{B}^{*-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$$

O también como,

$$\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{x}_\mathbf{B}^{*} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$$

Ahora bien, realizar el análisis de sensibilidad en el lado derecho de la *i*-ésima restricción de un MPLC implica introducir una pequeña perturbación en el lado derecho de esta, digamos que sea:

$$\Delta b_i^t = (0 \;\; 0 \;\; . \;. \;. \; \delta_i \;\; . \;. \;. \;\; 0)$$

Por tanto, la expresión: $\mathbf{x}_\mathbf{B}^{*'} = \mathbf{x}_\mathbf{B}^{*} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_i \geq \mathbf{0}$, será reemplazada por:

$$x_B^{*'} = x_B^* + \mathrm{B}^{*-1}\,\Delta\,\mathrm{b}_\mathrm{i} \geq \mathbf{0}$$



Lo anterior quiere decir que suponemos la base actual aún óptima; esto es, la matriz inversa de variables básicas (B^{*-1}) y la solución óptima (x_B^*) permanecen aún óptimas. Por tanto, queda por resolver el sistema de desigualdades derivado de la expresión: $x_B^{*\prime} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$, el cual proporciona el intervalo de factibilidad buscado.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$

$s.a.$

$3x_1 + x_2 \leq 48$

$x_1 + 2x_2 \leq 36$

con $x_1, x_2 \geq 0$

Solución

En este caso, primero aplicamos el método simplex, generando las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

La tabla inicial simplex es la que se muestra en la tabla A.4, mientras que en la tabla A.5 se observa la tabla de primera iteración y en la tabla A.6 se muestra la tabla de segunda iteración.

[ENTRA TABLA A.4]

Tabla A.4

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
$C_j - z_j$	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.4]



Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

[ENTRA TABLA A.5]

Tabla A.5 Tabla de la primera iteración

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	X_1X_2	X_3X_4	LD	θ
3	X_1	1 1/3	1/3 0	16	48
0	X_4	0 5/3	-1/3 1	20	12
C_j-z_j	Z	0 1	-1 0	48	

[TERMINA TABLA A.5]

[ENTRA TABLA A.6]

Tabla A.6 Segunda iteración

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	X_1X_2	X_3X_4	LD	Θ
3	X_1	1 0	2/5 -1/5	12	
2	X_2	0 1	-1/5 3/5	12	
C_j-z_j	Z	0 0	-4/5 -3/5	60	

[TERMINA TABLA A.6]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Donde: $B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ahora, supóngase que se desea hallar el rango de valores factibles para el lado derecho de la primera restricción (intervalo de factibilidad para b_1) del MPLC, para que la solución óptima actual aún permanezca óptima. Para tal efecto, consideremos lo siguiente:

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que: $x_B^{*\prime} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$

Que quedaría expresada como:

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\delta_1 \\ -\delta_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para que se satisfaga la factibilidad se tiene que cumplir:

$$12 + \tfrac{2}{5}\delta_1 \geq 0 \Rightarrow \delta_1 \geq -30$$

$$12 - \tfrac{1}{5}\delta_1 \geq 0 \Rightarrow \delta_1 \leq 60$$

Por tanto, la solución nos lleva a: $\delta_1 \in [-30;60]$, que constituye el intervalo de la perturbación para que la base actual aún permanezca óptima. De modo que para hallar el intervalo de factibilidad para , solo basta sumarle a cada uno de los extremos del intervalo anterior, y queda: $b_1 \in [18;108]$, que es precisamente el intervalo de factibilidad.

Así que si se supone que la perturbación es:

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nueva solución óptima será:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O bien:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo sería:

$$Max\ z^{*'} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = 36$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=18
X1+2X2<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Se tiene como **salida:**

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) **36.00000**



VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	0.000000
X2	18.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Por otro lado, supóngase que deseamos hallar el rango de valores para el lado derecho de la segunda restricción (intervalo de factibilidad para b_2) del MPLC, para que la solución óptima actual aún permanezca óptima. Para tal efecto, consideremos lo siguiente:

$$\Delta b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

Así que:

$$x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$$

La cual quedaría expresada como:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

O bien,

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -\delta_2 \\ 3\delta_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, para que se satisfaga la factibilidad, se tiene que cumplir:

$$12 - \tfrac{1}{5}\delta_2 \geq 0 \Rightarrow \ \delta_2 \leq 60$$

$$12 + \tfrac{3}{5}\delta_2 \geq 0 \Rightarrow \ \delta_2 \geq -20$$



Por tanto, $\delta_2 \in [-20;60]$, que constituye el intervalo de la perturbación para que la base actual aún permanezca óptima. De modo que para hallar el intervalo de factibilidad para b_2, solo basta sumarle a $b_2 = 36$ cada uno de los extremos del intervalo anterior, que queda: $b_2 \in [16;96]$, que es precisamente el intervalo de factibilidad.

Así que si se supone que la perturbación es:

$$\Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Así, la nueva solución óptima es:

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

O bien:

$$x_B^{*\prime} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es:

$$Max\ z^{*\prime} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 48 \end{pmatrix} = 96$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en el software Lindo del nuevo modelo, y cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
S.T.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=96

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]



Se tiene como **salida:**

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 96.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	0.000000
X2	48.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad agregando una nueva variable [T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex, dado que en esta sección es fundamental para el desarrollo y comprensión de los cinco casos.

Añadir otra actividad equivale a introducir en el MPLC una nueva variable x_{n+1}, con los coeficientes apropiados en las restricciones; es decir, en la $(n+1)$ -ésima columna, denotada como $\mathbf{p}_{n+1}$, y en la función objetivo con coeficiente c_{n+1}. En otras palabras, al añadir una nueva variable de decisión al MPLC, se requiere conocer: a) Los datos de la columna $\mathbf{p}_{n+1}$ y *b*) el coeficiente de esa variable en función objetivo, c_{n+1}.

Por tanto, se calcularán los valores:

$c_{n+1} - z_{n+1} = c_{n+1} - \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$, y

$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$

Luego, la optimalidad de la solución dependerá del valor ($c_j - z_j$) de la nueva variable x_{n+1}, ya que si la función a optimizar es de máximo, la prueba de optimalidad consiste en satisfacer: ($c_j - z_j \leq 0$), o bien, si la función a optimizar es de mínimo, la prueba de optimalidad consiste en satisfacer: ($c_j - z_j \geq 0$). Si en cada caso se satisface, la nueva variable seguirá siendo no básica y la solución aún será óptima; es decir, el introducir una nueva variable al MPLC, no cambia su solución óptima ni el valor óptimo de la función a optimizar. Sin embargo, si no se cumple la prueba de optimalidad, la solución ya no es óptima, por lo que dicha variable debe entrar al conjunto de variables básicas y, por ende, aplicar el algoritmo simplex, con la finalidad de hallar la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar.

Por lo anterior, se concluye que si la introducción de la nueva variable satisface la prueba de optimalidad, entonces esta variable será no básica; en caso contrario, la nueva variable será básica.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$

$s.a.$ con $x_1, x_2 \geq 0$

$3x_1 + x_2 \leq 48$

$x_1 + 2x_2 \leq 36.$



Solución

Primero, se aplica el algoritmo simplex, generando las iteraciones correspondientes hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.7

Tabla A.7 Tabla inicial simplex

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	X_1X_2	X_3X_4	LD	θ
0 0	X_3 X_4	3 1 1 2	1 0 0 1	48 36	48/3 36/1
$C_j - z_j$	Z	3 2	0 0	0	

[TERMINA TABLA A.7]

[ENTRA TABLA A.8]

Tabla A.8 Primera iteración

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	X_1X_2	X_3 X_4	LD	θ
3 0	X_1 X_4	1 1/3 0 5/3	1/3 0 -1/3 1	16 20	48 12
C_j-z_j	Z	0 1	-1 0	48	

[TERMINA TABLA A.8]



[ENTRA TABLA A.9]

Tabla A.9 Segunda iteración

C_j		3 2	0 0		
C_B	VB	$X_1 X_2$	$X_3 X_4$	LD	Θ
3	X_1	1 0	2/5 -1/5	12	
2	X_2	0 1	-1/5 3/5	12	
$C_j - z_j$	Z	0 0	-4/5 -3/5	60	

[TERMINA TABLA A.9]

Como se cumple la prueba de optimalidad, entonces se dice que se ha llegado a la solución óptima del modelo original, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 60$$

Solución sin uso de la tabla

De la tabla óptima se obtiene:

$$\mathbf{B}^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t} = (3 \;\; 2)$$

Ahora, supongamos que se desea introducir la variable conforme los parámetros siguientes: $c_3 = 2$ y $\mathbf{p}_3^\mathbf{t} = (2 \;\; 1)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 2 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 2 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{-1}{5} < 0$$

Por tanto, la base actual permanece óptima y la solución del nuevo modelo no cambiará; es decir la solución óptima seguirá siendo:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo también seguirá siendo:

$$\mathbf{z}^{*'} = (3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 60$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2+2X3
s.t.
3X1+X2+2X3<=48
X1+2X2+X3<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
```



1) 60.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	12.000000	0.000000
X2	12.000000	0.000000
X3	0.000000	0.200000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.800000
3)	0.000000	0.600000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De nueva cuenta, supóngase que la nueva variable x_3 contiene los parámetros siguientes: $c_3 = 3$ y $\mathbf{p}_3^t = (2 \;\; 1)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo?

Si se calcula $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{4}{5} > 0$$

De acuerdo con este resultado la base actual cambiará, por tanto aplicamos el algoritmo simplex sin arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex sin arreglo tabular, la *variable entrante* es x_3, y para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

Al actualizar la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_3 = B^{-1} p_3$$

$$\hat{p}_3 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, se actualiza el vector de recursos a través de:

$$\hat{b} = B^{*-1} b$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así que con la regla del mínimo cociente determinamos la *variable saliente:*

$$mín\left\{\frac{12}{\frac{3}{5}}, \frac{12}{\frac{1}{5}}\right\} = mín\{20,60\} = 20$$, por tanto $x_s = x_1$.

Nota: Es importante considerar que el conjunto de subíndices de variables básicas del modelo original es: $\beta_2 = \{1,2\}$, y su conjunto de subíndices de variables no básica es: $\eta_2 = \{3,4\}$. Así que para cuando se introduce la nueva variable de decisión x_3, se asume de entrada que esta es no básica. Por lo que los nuevos conjuntos quedan definidos como: $\beta_2 = \{1,2\}$ y $\eta_2 = \{3,4,5\}$.

Al redefinir el nuevo conjunto de variables básicas y no básicas, se sabe de antemano que la variable entrante es x_3 y la variable saliente es x_1 .Entonces se tiene: $\beta = \{3,2\}$ y $\eta = \{1,4,5\}$

Así que la nueva matriz de variables básicas queda:

$$B = (p_3 \ p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ y $\eta = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_4 \ \mathbf{p}_5)$

Y la nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$B^{-1} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } c_B^t = (3 \;\; 2)$$

Ahora, revisamos si con esta base restauramos optimalidad.

Para $j = 1$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_1$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = \tfrac{-4}{3} < 0$$

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = \tfrac{-4}{3} < 0$$

Para $j = 5$

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_5$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \;\; 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3\ \ 2)\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \tfrac{-1}{3} < 0$$

Como se restaura la optimalidad, entonces la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo son:

$$x_B^{*\prime} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $\mathbf{z}^{*\prime} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix} = 76$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2+3X3
s.t.
3X1+X2+2X3<=48
X1+2X2+X3<=36

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTOI DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
```

1) 76.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.333333
X2	8.000000	0.000000
X3	20.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.333333
3)	0.000000	0.333333

NO. ITERATIONS= 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Solución con uso de la tabla cuando existe variable entrante

Supóngase que la nueva variable x_3 contiene los parámetros siguientes: $c_3 = 3$ y $\mathbf{p}_3^t = (2 \quad 1)$.

Además de suponer que la base actual es aún óptima, ¿la introducción de la nueva variable, cambiará la nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_3 - z_3$ tenemos:

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 3 - (3 \quad 2)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{4}{5} > 0$$



Con base en este resultado, la base actual cambiará; por tanto, aplicamos el algoritmo simplex con arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex con arreglo tabular, la *variable entrante* es x_3 y para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_3 = B^{-1} p_3$$

$$\hat{p}_3 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[ENTRA TABLA A.10]

Tabla A.10

C_j		3 2 3	0 0		
C_B	VB	$X_1 X_2 X_3$	$X_3 X_4$	LD	Θ
3	X_1	1 0 3/5	2/5 -1/5	12	20
2	X_2	0 1 1/5	-1/5 3/5	12	60
$C_j - z_j$	Z	0 0 4/5	-4/5 -3/5	60	

[TERMINA TABLA A.10]

Nótese que la tabla A.10 se genera al usar la misma tabla cuando se encontró la solución óptima del modelo original, pero solo se le agregó la nueva columna de la variable x_3 actualizada, así como correspondiente al valor $c_3 - z_3 = \frac{4}{5}$, antes calculado.

Luego, al aplicar el algoritmo simplex se genera la nueva tabla (véase tabla A.11).



[ENTRA TABLA A.11]

Tabla A.11

C_j		3 2 3	0 0		
C_B	VB	$X_1 X_2 X_3$	$X_3 X_4$	LD	Θ
3	X_3	5/3 0 1	2/3 -1/3	20	
2	X_2	-1/3 1 0	-1/3 2/3	8	
$C_j - z_j$	Z	-4/3 0 0	-4/3 -1/3	76	

[TERMINA TABLA A.11]

Por tanto, se restaura la optimalidad. La nueva solución óptima y el nuevo valor óptimo de la función a optimizar son: $\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{z}^{*'} = 76$

Que son los mismos resultados antes obtenidos.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad agregando una nueva restricción [T2]

Como en las secciones anteriores, antes de iniciar el estudio de esta sección es conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.

Es importante destacar que cuando se agrega una nueva restricción, se pueden presentar los casos siguientes:

a) La nueva restricción es inactiva.
b) La nueva restricción es activa.

Restricción inactiva [T3]

La restricción inactivase presenta cuando la solución óptima del modelo original satisface la nueva restricción, por lo que tanto la solución óptima como el valor óptimo de la función a optimizar siguen siendo los mismos. En este caso, la restricción es redundante para el MPLC.



Restricción activa [T3]

La restricción activa se presenta cuando la solución óptima del modelo original no satisface la nueva restricción y la solución óptima original se modifica; como se representó antes. En este caso, cambia el área del conjunto poliédrico; por tanto, para hallar la nueva solución óptima ($\mathbf{x}_B^{*'}$) y el valor óptimo de la función a optimizar ($\mathbf{z}^{*'}$) se aplica el algoritmo dual simplex.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + x_2 \le 48 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \ge 0$$
$$x_1 + 2x_2 \le 36$$

Determinar cuál sería la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar cuando se agrega la restricción: $x_1 + x_2 \le 30$.

Solución

En este caso, primero aplica el algoritmo simplex para el modelo original, generando las iteraciones correspondientes hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.12]

Tabla A.12 Tabla inicial simplex

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
0	X_3	3	1	1	0	48	48/3
0	X_4	1	2	0	1	36	36/1
C_j-z_j	Z	3	2	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.12]



[ENTRA TABLA A.13]

Tabla A.13 Primera iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	θ
3	X_1	1	1/3	1/3	0	16	48
0	X_4	0	5/3	-1/3	1	20	12
$C_j - z_j$	Z	0	1	-1	0	48	

[TERMINA TABLA A.13]

[ENTRA TABLA A.14]

Tabla A.14 Segunda iteración

C_j		3	2	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	LD	Θ
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	12	
2	X_2	0	1	-1/5	3/5	12	
C_j-z_j	Z	0	0	-4/5	-3/5	60	

[TERMINA TABLA A.14]

Como se puede comprobar, en este caso se cumple la prueba de optimalidad, entonces se ha llegado a la solución óptima del modelo original, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z}^* = 60$$



Ahora bien, si sustituimos los valores de la solución óptima en la nueva restricción, se tiene:

$$x_1 + x_2 = 12 + 12 = 24 < 30$$

Por tanto, esta restricción es inactiva; entonces, la solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar siguen siendo los mismos.

Por otro lado, si asumimos que la nueva restricción es: $x_1 + x_2 \leq 20$, ¿cuál sería la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función a optimizar?

Al sustituir los valores de la solución óptima en esta restricción, se tiene: $x_1 + x_2 = 12 + 12 = 24 > 20$ por lo que la nueva restricción es activa. Es decir, esta modificará el área del conjunto poliédrico.

Así que para efectos de hallar la nueva solución y el valor óptimos de la función a optimizar, la tabla óptima del modelo original se le añadirá la restricción activa (valores marcados en color azul), una vez que se asume que dicha restricción se convirtió en una igualdad(véase tabla A.15).

[ENTRA TABLA A.15]

Tabla A.15

C_j		3	2	0	0	0	
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	*LD*
3	X_1	1	0	2/5	-1/5	0	12
2	X_2	1.	1	-1/5	3/5	0	12
0	X_5	1	1	0	0	1	20
C_j-z_j	*Z*	0	0	-4/5	-3/5	0	60

[TERMINA TABLA A.15]



Así que se aplica el algoritmo dual simplex (véase tabla A.16).

[ENTRA TABLA A.16]

Tabla A.16

C_j		3 2	0 0 0	
C_B	*VB*	X_1X_2	$X_3X_4X_5$	*LD*
3	X_1	1 0	2/5 -1/5 0	12
2	X_2	1. 1	-1/5 3/5 0	12
0	X_5	0 1	-2/5 1/5 1	8
C_j-z_j	*Z*	0 0	-4/5 -3/5 0	60
3	X_1	1 0	2/5 -1/5 0	12
2	X_2	0 1	-1/5 3/5 0	12
0	X_5	0 0	-1/5 -2/5 1	-4
C_j-z_j	*Z*	0 0	-4/5 -3/5 0	60

[TERMINA TABLA A.16]

La tabla A.15 se genera al multiplicar por -1 el renglón 1 y sumarle el renglón 3. Mientras que la tabla A.16 se genera al multiplicar por -1 el renglón 2 y sumarle el renglón3. A partir de estas tablas, es posible percatarse que se pierde factibilidad, así que para restaurarla, se aplica el algoritmo mencionado, el cual genera la tabla A.17.

[ENTRA TABLA A.17]

Tabla A.17

C_j		3 2	0 0 0	
C_B	*VB*	X_1X_2	$X_3X_4X_5$	*LD*
3	X_1	1 1	1/2 0 -1/2	14
2	X_2	0 1	-1/2 0 3/2	6
0	X_4	0 0	1/2 1 -5/2	10
C_j - z_j	*Z*	0 0	-1/2 0 -3/2	54

[TERMINA TABLA A.17]

En este caso, como se restauró la factibilidad y se cumple la prueba de optimalidad, se ha encontrado la nueva solución óptima y el nuevo valor de la función a optimizar:

$$\mathbf{x}_B^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z}^{*'} = 54$$

A continuación se comprueba el resultado obtenido con Lindo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+2X2
s.t.
3X1+X2<=48
X1+2X2<=36
X1+X2 <=20

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 54.00000

VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
     X1          14.000000        0.000000
     X2           6.000000        0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)          0.000000          0.500000
  3)         10.000000          0.000000
  4)          0.000000          1.500000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]



Análisis de sensibilidad en una columna de una variable no básica[T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, se considera conveniente recurrir a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex. Hasta este momento se ha asumido que los coeficientes tecnológicos definidos en $\mathbf{a}_{ij}$ permanecen constantes. Esto significa, por ejemplo, que la cantidad del *i*-ésimo recurso consumido por unidad del *j*-ésimo producto es invariable en el MPLC. Lo que resulta cuestionable, dado que la $\mathbf{a}_{ij}$ se mantiene sin variante para un cierto periodo. Una de las razones por las cuales la $\mathbf{a}_{ij}$ no puede mantenerse constante se debe a agentes externos a la empresa; por ejemplo, cuando se descubre una nueva técnica de producción. Otra razón, se debe a una variación interna de la empresa; por ejemplo, el departamento técnico mejora los procesos actuales de manufactura.

Supóngase que el vector $\mathbf{p}_j$ de una variable no básica se cambió por $\mathbf{p}_j$ en el MPLC definido antes; de este modo, la prueba de optimalidad de la solución actual puede afectarse, dado que la factibilidad no se altera por tratarse de una variable no básica. Con base en esto, se asume que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x_B^* = B^{*-1}b$.

Al asumir que se desea llevar a cabo el análisis de sensibilidad en una columna de una variable no básica, significa que una vez hallada la solución óptima, es posible saber cuáles variables son básicas y cuáles no, *interesándonos solo en aquellas variables no básicas,* pero de decisión. Ya que las variables de holgura se añaden para estandarizar el modelo, simplemente no interesan para efectos de este tema. Bajo estas consideraciones, hacemos los supuestos siguientes:

• La base actual sigue siendo óptima (B^{*-1}).
• La *j*-ésima columna de la matriz de coeficientes tecnológicos denotada como $\mathbf{p_j}$, correspondiente a la *j*-ésima variable no básica, cambia a $\mathbf{p}_j'$.
• Todos los demás parámetros del modelo permanecen sin cambios.

Ahora bien, debido a la perturbación (cambiar la columna $\mathbf{p_j}$ por $\mathbf{p}_j'$) en el MPLC, se pueden considerar los supuestos siguientes:

• La columna perturbada ($\mathbf{p}_j'$) de la *j*-ésima variable no básica, no sufre cambios.
• La columna perturbada ($\mathbf{p}_j'$) de la *j*-ésima variable no básica, sufre cambios, es decir: ($c_j - z_j > 0$).

El *primer supuesto* considera que con la *j*-ésima columna perturbada, la base actual óptima no cambia, es decir: ($c_j - z_j \leq 0$, para caso máximo). O sea que al llevar a cabo el cálculo de $c_j - z_j$, se cumple la prueba de optimalidad; así, entonces, se concluye al decir que con la j-ésima columna perturbada, la base actual óptima no cambia, y esa *j*-ésima variable en el óptimo sigue tomando el valor de cero.

El *segundo supuesto* considera que con la j-ésima columna perturbada, la base actual óptima cambia, es decir: ($c_j - z_j > 0$, para caso máximo). O sea que al llevar a cabo el cálculo de $c_j - z_j$, ya se cumple la prueba de optimalidad; así entonces, se concluye al decir que con

la *j*-ésima columna perturbada la base actual óptima cambia, y esa j-ésima variable en el óptimo es la nueva variable entrante, y entonces se restaura la optimalidad al aplicar el método algoritmo primal y, por consiguiente, cambiará la base actual y el valor óptimo de la función objetivo.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 20x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 360$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 480$$

con $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Solución

En este caso, primero aplicamos el algoritmo simplex para generar las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.18]

Tabla A.18 Tabla inicial simplex

C_j		20 30 25	0 0		
C_B	VB	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	LD	θ
0	X_4	3 5 2	1 0	360	360/5
0	X_5	2 4 1	0 1	480	480/4
$C_j - z_j$	Z	20 30 25	0 0	0	

[TERMINA TABLA A.18]



[ENTRA TABLA A.19]

Tabla A.19 Primera iteración

C_j		20 30 25	0 0		
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	*LD*	θ
30	X_2	3/5 1 2/5	1/5 0	72	180
0	X_5	-2/5 0 -3/5	-4/5 1	192	----
C_j-z_j	*Z*	2 0 13	-6 0	2160	

[TERMINA TABLA A.19]

[ENTRA TABLA A.20]

Tabla A.20 Segunda iteración

C_j		20 30 25	0 0		
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	*LD*	Θ
25	X_3	3/2 5/2 1	1/2 0	180	
0	X_5	1/2 3/2 0	-1/2 1	300	
C_j - z_j	*Z*	-35/2 -65/2 0	-25/2 0	4500	

[TERMINA TABLA A.20]

Como se puede observar, se cumple la prueba de optimalidad, por tanto se ha llegado a la solución óptima, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{z}^* = 4500$$

Donde:

$$B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} \text{ y } c_B^t = (25 \quad 0)$$

Ahora, supongamos que se cambia la columna $\mathbf{p_2}$ por $\mathbf{p_2'}$, cuyos nuevos componentes son: $\mathbf{p_2'^t} = (3 \quad 2)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la perturbación en la variable no básica x_2, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Si se investiga con base en prueba de optimalidad primal, se tiene:
Al calcular $c_2 - z_2$:

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c_B^t B^{*-1} p_2}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{-15}{2} < 0$$

Por tanto, la base actual permanece óptima y la solución del nuevo modelo no cambia. Es decir, la nueva solución óptima será:

$$x_B^{*'} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*'} = (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} = 4500$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en LINDO del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+3X2+2X3<=360
2X1+2X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]



Y su salida es:

[ENTRA TEXTOI DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4500.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	17.5000000
X2	0.000000	7.5000000
X3	180.000000	0.0000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	12.5000000
3)	300.000000	0.0000000

NO. ITERATIONS = 1

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Por otro lado, supóngase que la columna $\mathbf{p}_2^t = (5 \quad 4)$ cambia a $\mathbf{p}_2^{'t} = (2 \quad 4)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, ¿la perturbación en la variable no básica x_2, cambiará la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Al calcular $c_2 - z_2$ tenemos:

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_2$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0) \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 5 > 0$$

Por tanto, la base actual cambia y podemos aplicar el algoritmo simplex con o sin arreglo tabular, con el fin de restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el valor óptimo de la función objetivo.

Para este caso, solo aplicaremos el algoritmo simplex sin arreglo tabular; por tanto, la variable entrante es x_2. Ahora, para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante, mediante:

$$\hat{p}_2 = B^{-1} p_2$$

$$\hat{p}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Se actualiza el vector de recursos, mediante:

$$\hat{b} = B^{*-1} b$$

$$\hat{b} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}$$

3. Con la regla del mínimo cociente determinamos la variable saliente:

$$min\left\{\frac{180}{1}, \frac{300}{3}\right\} = min\{180, 100\} = 100, \text{ por tanto } x_s = x_5$$

Recuérdese que el conjunto de subíndices de variables básicas y no básicas son: $\beta = \{3,5\}$, y $\eta = \{1,2,4\}$ respectivamente. Y como la variable entrante es x_2 y la saliente es x_5, entonces los nuevos conjuntos de subíndices de variables básicas y variables no básicas quedan: $\beta = \{3,2\}$, y $\eta = \{1,5,4\}$, respectivamente. Por lo anterior, la nueva matriz de variables básicas queda:

$$B = (p_3 \; p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = (\mathbf{p}_1 \; \mathbf{p}_5 \; \mathbf{p}_4)$$

Y la nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$B^{-1} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c_B^t = (25 \;\; 30)$$

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Ahora bien, con esta base se revisa si es posible restaurar optimalidad.

Para j = 1

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_1$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = \tfrac{-55}{3} < 0$$

Para j = 5

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_5$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \tfrac{-5}{3} < 0$$

Para j = 4

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 30)\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = \tfrac{-35}{3} < 0$$

De esta manera se ha restaurado la prueba de optimalidad; así la nueva solución óptima es:

$$x_B^{*'} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Y el nuevo valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*'} = (25 \quad 30)\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = 5000$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+2X2+2X3<=360
2X1+4X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y la salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 5000.00000

VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
      X1          0.000000         18.333333
      X2        100.000000          0.000000
      X3         80.000000          0.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
   2)           0.000000            11.666667
   3)           0.000000             1.666667
```



NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

Análisis de sensibilidad en una columna de una variable básica [T2]

Antes de iniciar el estudio de esta sección, se recomienda que el lector recurra a los conocimientos previos del algoritmo simplex y sus variantes, así como del algoritmo dual simplex.

Cuando la columna de una variable básica cambia, digamos que sea $\mathbf{p}_{B_r}$ a $\mathbf{p}'_{B_r}$ con x_{B_r} la variable básica, entonces la matriz de variables básicas en el óptimo ($\mathbf{B}$) cambia a $\mathbf{B}'$. Esto ocasiona que la solución óptima $\mathbf{x}^*_B$, el valor de la función a optimizar $\mathbf{z}^*$ y los $(c_j - z_j)$ cambien a $\mathbf{x}^{*'}_B = \mathbf{B}^{-1'}\mathbf{b}$, $\mathbf{z}^{*'} = \mathbf{c}^t_B\mathbf{B}^{-1'}\mathbf{b}$ y $(c_j - z'_j)$, respectivamente. Por lo que es recomendable resolver el nuevo MPLC desde el inicio.

Por tanto, se propone el MPLC como se definió antes, así que se supone que el modelo tiene soluciones factibles y que se ha hallado su solución óptima, expresada como: $x^*_B = B^{*-1}b$. Si se asume que deseamos llevar a cabo el *análisis de sensibilidad en una columna de una variable básica,* significa que una vez hallada la solución óptima, sabremos cuales variables son básicas y cuáles no lo son, *interesándonos solo en aquellas variables básicas de decisión*, ya que las variables de holgura que se añaden para estandarizar el modelo, simplemente no son de interés para efectos de este tema.

Ahora bien, debido a la perturbación (cambio de la columna $\mathbf{p_j}$ de una variable básica por $\mathbf{p'_j}$) en el MPLC, no podemos garantizar que la base siga siendo óptima, ya que esta puede cambiar:

- La base actual óptima (B^{*-1}).
- La solución óptima ($x^*_B = B^{*-1}b$).
- El valor óptimo de la función objetivo (z^*).

Por tanto, *se recomienda volver a resolver el modelo desde el principio;* es decir, aplicar el método simplex con o sin arreglo tabular.

[ENTRA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Supóngase que se tiene el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 20x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$s.a.$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 360$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 480$$

con $x_1, x_2, x_3 \ge 0$



Solución

Primero, aplicamos el algoritmo simplex, generando las iteraciones correspondientes, hasta hallar la solución óptima.

[ENTRA TABLA A.21]

Tabla A.21 Tabla inicial simplex

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD	θ
0	X_4	3	5	2	1	0	360	360/5
0	X_5	2	4	1	0	1	480	480/4
$C_j - z_j$	Z	20	30	25	0	0	0	

[TERMINA TABLA A.21]

[ENTRA TABLA A.22]

Tabla A.22 Primera iteración

C_j		20	30	25	0	0		
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD	θ
30	X_2	3/5	1	2/5	1/5	0	72	180
0	X_5	-2/5	0	-3/5	-4/5	1	192	----
C_j-z_j	Z	2	0	13	-6	0	2160	

[TERMINA TABLA A.22]



[ENTRA TABLA A.23]

Tabla A.23 Segunda iteración.

C_j		20 30 25	0 0		
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	*LD*	Θ
25	X_3	3/2 5/2 1	1/2 0	180	
0	X_5	1/2 3/2 0	-1/2 1	300	
C_j- z_j	*Z*	-35/2 -65/2 0	-25/2 0	4500	

[TERMINA TABLA A.23]

Como se cumple la prueba de optimalidad, por tanto se ha llegado a la solución óptima, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^* = 4500$$

Donde:

$$B^{*-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_B^* = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 300 \end{pmatrix} \text{y} \quad c_B^t = (25 \quad 0)$$

Ahora, supongamos que se cambia la columna $\mathbf{p}_3$ por $\mathbf{p}_3^{'}$, cuyos nuevos componentes son $\mathbf{p}_3^{'t} = (1 \quad 1)$. Con la perturbación en la variable básica x_3, ¿cuál será la nueva solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo?

Con base en esta recomendación, entonces nuevamente debemos resolver el modelo desde el principio; es decir, debemos aplicar el algoritmo simplex *sin arreglo tabular.*

Las matrices de variables básicas y no básicas son:

$$B_0 = (P_4 P_5) \text{ y } \quad N = (P_1 P_2 P_3)$$

Así que:

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad c_B^t = (0 \quad 0)$$



Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para j = 1

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 > 0$$

Para j = 2

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_2}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 > 0$$

Para j = 3

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c_B^t B_0^{-1} p_3}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 > 0$$

Por tanto, la base actual no es óptima y la variable entrante es: $x_e = x_2$. Ahora bien, para buscar la variable saliente hacemos:

1. La actualización de la columna de la variable entrante:

$$\hat{p}_2 = B_0^{-1} p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. La actualización del vector de recursos:

$$\hat{b}_0 = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$mín\left\{\frac{360}{5}, \frac{480}{4}\right\} = mín\{72{,}120\} = 72$, así que $x_s = x_4$

De este modo, los nuevos conjuntos de variables básicas y no básicas son: $\beta_1 = (2,5)$ y $\eta_1 = (1,4,3)$ respectivamente.

Y la nueva base queda como:

$$B_1 = (P_2 P_5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que:

$B_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $c_B^t = (30 \quad 0)$.

Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para $j = 1$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_1^{-1} p_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 2 > 0$$

Para $j = 4$

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -6 < 0$$

Para $j = 3$

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 25 - (30 \quad 0)\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 19 > 0$$

Por tanto, la base actual no es óptima y la variable entrante es:

$$x_e = x_3$$

Ahora, para buscar la variable saliente, hacemos:

1. La actualización de la columna de la variable entrante:

$$\hat{p}_3 = B_1^{-1} p_3 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. La actualización del vector de recursos:

$$\hat{b}_1 = B_1^{-1} b = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$mín\left\{\frac{72}{\frac{1}{5}}, \frac{192}{\frac{1}{5}}\right\} = mín\{360,960\} = 360$$, así que $x_s = x_2$

De este modo, los nuevos conjuntos de variables básicas y no básicas son: $\beta_2 = (3,5)$ y $\eta_2 = (1,4,2)$ respectivamente.

Y la nueva base queda como:

$$B_2 = (P_3 P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que $\mathbf{B_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c_B^t} = (25 \quad 0)$.

Al revisar si esta base es óptima, tenemos:

Para *j* = 1

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c_B^t B_2^{-1} A_1}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 20 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = -55 < 0$$

Para *j* = 4

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c_B^t B_2^{-1} A_4}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = -25 < 0$$

Para $j = 2$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_2$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_2 - z_2 = 30 - (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -95 < 0$$

Por tanto, la base actual es óptima y su solución es:

$$x_B^* = B_2^{*-1}b = \begin{pmatrix} x_3^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Y

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{t}\mathbf{x}_\mathbf{B}^* = (25 \quad 0)\begin{pmatrix} 360 \\ 120 \end{pmatrix} = 9000$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 20X1+30X2+25X3
s.t.
3X1+5X2+X3<=360
2X1+4X2+X3<=480

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]



Y como salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 9000.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	55.0000000
X2	0.000000	95.0000000
X3	360.000000	0.0000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	25.0000000
3)	120.000000	0.0000000

NO. ITERATIONS = 1

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[ENTRA PROBLEMA DE APLICACIÓN]

Problema de aplicación [T2]

Sugarco tiene la capacidad de producir tres tipos de barras de caramelo, cada una de las cuales está elaborada con complemento de azúcar y chocolate. La composición de cada tipo de barra y la utilidad ganada por una barra de caramelo se observa en la tabla A.24. La empresa dispone de 50 onzas de azúcar y 100 onzas de chocolate. Después de definir x_i como la cantidad de barras de caramelo tipo i elaboradas por Sugarco, la empresa debe resolver el MPLC siguiente:

$$Max\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$s.a$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \quad \text{Restricción de azúcar} \qquad \text{con} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \quad \text{Restricción de chocolate}$$



[ENTRA TABLA A.24]

Tabla A.24

Barra	Cantidad de azúcar (onzas)	Cantidad de chocolate (onzas)	Utilidad (centavos)
1	1	2	3
2	1	3	7
3	1	1	5

[TERMINA TABLA A.24]

Luego de sumar las variables de holgura s_1 y s_2, la tabla óptima se ilustra en la tabla A.25.

[ENTRA TABLA A.25]

Tabla A.25

C_j		3 7 5	0 0	
C_B	*VB*	$X_1 X_2 X_3$	$X_4 X_5$	*LD*
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25
$C_j - z_j$	Z	-3 0 0	-4 -1	300

[TERMINA TABLA A.25]



Con base en lo anterior y considerando la tabla óptima, contestar las preguntas que se formulan a continuación.

a) ¿Para qué valor de utilidad de la barra de caramelo tipo 1, la base actual aún es óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 1 fuera 7 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

b) ¿Para qué valor de utilidad de la barra de caramelo tipo 2, la base actual aún es óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 2 fuera 13 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

c) ¿Para qué cantidades de azúcar disponible la base actual se mantiene óptima?

d) Si hubiera 60 onzas disponibles de azúcar, ¿cuál sería la utilidad de Sugarco? ¿Cuántas de barras de cada tipo se podrían elaborar? ¿Se podría dar respuestas a estas preguntas si solo hubiera disponible 30 onzas de azúcar?

e) Supóngase que una barra de caramelo tipo 1 usa solo 0.5 onzas de azúcar y 0.5 onzas de chocolate. ¿Debe entonces Sugarco producir barras de caramelo tipo 1?

f) Sugarco proyecta producir barras de caramelo tipo 4, pues con este tipo de barra gana 17 centavos; la producción de esta barra requiere 3 onzas de azúcar y 4 onzas de chocolate. ¿Debe Sugarco elaborar barras de caramelo tipo 4?

Solución

a) [ENTRA TABLA A.26]

Tabla A.26

C_j		C_1 7 5	0 0	
C_B	VB	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	LD
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25
$C_j - z_j$	Z	$(C_1 - 6)$ 0 0	-4 -1	300

[TERMINA TABLA A.26]



Para que se cumpla con la prueba de optimalidad, también debe suceder que C1 – 6 ≤ 0, por tanto C1 ≤ 6. Por tanto, $c_1 \in (-\infty, 6]$,al ser los posibles valores de utilidad.

Al comprobar este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100
END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP    2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE     VALUE       REDUCED COST
     X1       0.000000       3.000000
     X2      25.000000       0.000000
     X3      25.000000       0.000000
```




```
ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)         0.000000            4.000000
 3)         0.000000            1.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE     CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
               COEF         INCREASE        DECREASE
   X1        3.000000      3.000000        INFINITY
   X2        7.000000      8.000000        2.000000
   X3        5.000000      2.000000        2.666667

                    RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW        CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
RHS        INCREASE       DECREASE
  2         50.000000     50.000000       16.666666
  3        100.000000     50.000000       50.000000
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De esta salida, es posible observar que es el mismo intervalo de optimalidad, dado que al coeficiente actual $C_1 = 3$ lo máximo que se le puede incrementar es 3 y lo máximo que se le puede decrementar es una cantidad muy grande positiva.

Ahora, si la utilidad de la barra 1 fuera 7 en lugar de 3, se tendrían los siguientes datos (véase tabla A.27).

[ENTRA TABLA A.27]

Tabla A.27

C_j		7 7 5	0 0		ϴ
C_B	*VB*	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	*LD*	
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25	50
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25	50
$C_j - z_j$	*Z*	1 0 0	-4 -1	300	

[TERMINA TABLA A.27]

Al aplicar el algoritmo simplex se genera la iteración que se muestra en la tabla A.28.

[ENTRA TABLA A.28]

Tabla A.28

C_j		7	7	5	0	0	
C_B	VB	$X_1X_2X_3$			X_4X_5		LD
7	X_1	1	0	2	3	-1	50
7	X_2	0	1	-1	-2	1	0
$C_j - z_j$	Z	0	0	-2	-7	0	350

[TERMINA TABLA A.28]

Como se cumple la prueba de optimalidad, se ha llegado a la nueva solución óptima:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y

$$\mathbf{z}^{*'} = 350$$

Lo cual se verifica al realizar la corrida en Lindo del nuevo modelo, y cuya codificación es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 7X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
```



OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 350.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	50.000000	0.000000
X2	0.000000	2.000000
X3	0.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.000000
3)	0.000000	2.000000

NO. ITERATIONS = 2

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Como se puede comprobar, se llega a los mismos valores.

b)

[ENTRA TABLA A.29]

Tabla A.29

C_j		3	C_2	5	0	0	
C_B	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25
C_2	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25
$C_j - z_j$	Z	½(1-C_2)	0	0	-½(15-C_2)	½(5-C_2)	(125+25 C_2)

[TERMINA TABLA A.29]

Para que siga cumpliendo la prueba de factibilidad, también debe suceder que:

½(1-C2) ≤ 0; (1-C2) ≤ 0; C2 ≥ 1

-1/2(15-C2) ≤ 0; (15 – C2) ≥ 0; C2 ≤ 15

½(5-C2) ≤ 0; (5-C2) ≤ 0; C2 ≥ 5



Por consiguiente, se obtiene el intervalo de optimalidad $c_2 \in [5,15]$, que constituye los posibles valores de utilidad.

Al comprobar este resultado con LINDO, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE       VALUE       REDUCED COST
     X1          0.000000         3.000000
     X2         25.000000         0.000000
     X3         25.000000         0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
  2)          0.000000             4.000000
  3)          0.000000             1.000000

NO. ITERATIONS =  2
```




```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES

 VARIABLE      CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
                COEF         INCREASE       DECREASE
    X1        3.000000      3.000000       INFINITY
    X2        7.000000      8.000000        2.000000
    X3        5.000000      2.000000        2.666667

                    RIGHTHAND SIDE RANGES

    ROW      CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
    RHS      INCREASE     DECREASE
     2       50.000000    50.000000      16.666666
     3      100.000000    50.000000      50.000000
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Como se puede observar de esta salida, el intervalo de optimalidad es el mismo; dado que el coeficiente actual $C_2 = 7$ lo máximo que se le puede incrementar es 8 y lo máximo que se le puede decrementar es 2.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

Ahora bien, si la utilidad de la barra 1 fuera 13 en lugar de 7, se tendrían los resultados que se observan en la tabla A.30.

[ENTRA TABLA A.30]

Tabla A.30

C_j		3	13	5	0	0		Ѳ
C_B	VB	$X_1X_2X_3$			X_4X_5		LD	
5	X_3	1/2	0	1	3/2	-1/2	25	
13	X_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	25	
$C_j - z_j$	Z	-6	0	0	-1	-4	450	

[TERMINA TABLA A.30]



Si se verifica este resultado con Lindo se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+13X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP   2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 450.0000

VARIABLE      VALUE        REDUCED COST
    X1        0.000000        6.000000
    X2       25.000000        0.000000
    X3       25.000000        0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)         0.000000           1.000000
 3)         0.000000           4.000000


NO. ITERATIONS =  2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]



Conclusión

Se llega a los mismos valores.

c)

Recuérdese que la tabla A.31 es óptima.

[ENTRA TABLA A.31]

Tabla A.31

C_j		3 7 5	0 0	
C_B	VB	$X_1X_2X_3$	X_4X_5	LD
5	X_3	1/2 0 1	3/2 -1/2	25
7	X_2	1/2 1 0	-1/2 1/2	25
$C_j - z_j$	Z	-3 0 0	-4 -1	300

[TERMINA TABLA A.31]

Con base en lo revisado antes, es necesario recurrir a:

$$x_B^{*'} = x_B^* + B^{*-1}\Delta b_i \geq \mathbf{0}$$

Y como la restricción de azúcar es la primera, entonces se hace $i = 1$, y se tiene:

$$\mathbf{x_B^{*'}} = \mathbf{x_B^*} + \mathbf{B}^{*-1}\Delta\mathbf{b}_1 \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x_B^{*'}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Al realizar operaciones, se plantean las desigualdades siguientes:

$$25 + \tfrac{3}{2}\delta_1 \geq 0 \;\; ; \delta_1 \geq -\tfrac{50}{3}$$

$$25 - \tfrac{1}{2}\delta_1 \geq 0 \; ; \delta_1 \leq 50$$

De donde se obtiene que:

$$\delta_1 \in \left[\tfrac{-50}{3}, 50\right]$$



Entonces, el rango de factibilidad para la azúcar es: $b_1 \in \left[\frac{100}{3}, 100\right]$, que se obtiene de sumar el valor de -50/3 y el valor de b_1, que es 50; y nuevamente sumar 50 más el valor de b_1.

Si se comprueba este resultado con LINDO, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 50
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 300.0000

VARIABLE      VALUE       REDUCED COST
    X1        0.000000      3.000000
    X2       25.000000      0.000000
    X3       25.000000      0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
  2)        0.000000         4.000000
  3)        0.000000         1.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:


                  OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE   CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
            COEF        INCREASE       DECREASE
   X1     3.000000      3.000000       INFINITY
   X2     7.000000      8.000000       2.000000
   X3     5.000000      2.000000       2.666667
```



RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW RHS	CURRENT INCREASE	ALLOWABLE DECREASE	ALLOWABLE
2	50.000000	50.000000	16.666666
3	100.000000	50.000000	50.000000

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

De esta salida, se observa que es el mismo intervalo de factibilidad; dado que el valor actual de $b_1 = 50$, lo máximo que se le puede incrementar es 50 y lo máximo que se le puede decrementar es 16.33333 = 50/3.

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

d)

Si hubiera solo 60 onzas disponibles de azúcar, entonces para calcular la utilidad de Sugarco se tendrían que llevar a cabo los siguientes cálculos:

La matriz inversa de variables básicas es: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y el nuevo vector de recursos sería: $\begin{pmatrix} 60 \\ 100 \end{pmatrix}$.

De este modo, la nueva solución óptima sería:

Así, el número de barras que se podría elaborar la empresa sería: 20 del tipo 2 y 40 del tipo 3.

El valor óptimo de la utilidad sería:

$$\mathbf{z}^{*'} = (5 \;\; 7)\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 340$$



Al comprobar este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
X1+X2+X3 <= 60
2X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 340.0000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1          0.000000          3.000000
     X2         20.000000          0.000000
     X3         40.000000          0.000000


ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)          0.000000          4.000000
  3)          0.000000          1.000000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]



Conclusión

Se llega a los mismos valores.

El número de barras que se podría elaborar sería: 20 del tipo 2 y 40 del tipo 3.

Ahora bien, si hubiera 30 onzas de azúcar, sería posible dar respuesta a las preguntas anteriores, dado que el intervalo de factibilidad de b_1 incluye a 30.

e)

De acuerdo con la redacción de este inciso, el modelo modificado queda definido como:

$$Max\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$s.a$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \quad \text{Restricción de azúcar}$$

$$\tfrac{1}{2}x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \quad \text{Restricción de chocolate}$$

con $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Esto equivale a llevar a cabo un análisis de sensibilidad para una columna de una variable no básica, dado que x_1 no está presente en la solución óptima. Dicho análisis de sensibilidad se desarrolla como se vio previamente.

Así que supóngase que la columna $\mathbf{p}_1^{\mathbf{t}} = (1 \quad 2)$ cambia a $\mathbf{p}_1^{'\mathbf{t}} = (\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2})$. Además de considerar que la base actual aún es óptima. Con esta perturbación en la columna de la variable no básica x_1, ¿Sugarco debe producir barras de caramelo tipo 1?
Si se calcula $c_1 - z_1$ tenemos:

$$c_1 - z_1 = c_1 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_1$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = 3 - (5 \quad 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 - z_1 = \tfrac{1}{2} > 0$$

Por tanto, la base actual cambiará, al igual que la solución y el valor óptimos de la función a optimizar;así que la variable entrante será x_1. A continuación, se actualiza la columna de esta variable mediante:

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y si se actualiza el vector de recursos, se tiene:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*} = \begin{pmatrix} x_3^{*} \\ x_2^{*} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Así que con la regla del mínimo cociente determinamos la variable saliente:

$\theta = \min\left\{\frac{25}{\frac{1}{2}}, -\right\} = 50$, por tanto $x_s = x_3$

Como se recordará, el conjunto de subíndices de variables básicas y no básicas son: $\beta = \{3,2\}$ y $\eta = \{1,4,5\}$, respectivamente. Así que, como la variable entrante es x_1 y la saliente es x_3, entonces el nuevo conjunto de subíndices de variable básicas y no básicas son: $\beta = \{1,2\}$, y $\eta = \{3,4,5\}$, respectivamente. Por lo anterior, la nueva matriz de variables básicas queda:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \\ \tfrac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{N} = (\mathbf{p}_3\ \mathbf{p}_4\ \mathbf{p}_5)$$

La nueva inversa de la matriz de variables básicas es:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} = (3 \quad 7)$$

Eva S. Hernández Gress / Guillermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Ahora, se revisa si con esta base podemos restaurar la optimalidad.

Para j = 3

$$c_3 - z_3 = c_3 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_3$$

$$c_3 - z_3 = 5 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 5 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = -1 < 0$$

Para j = 4

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \frac{-11}{2} < 0$$

Para j = 5

$$c_5 - z_5 = c_5 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}^{*-1}\mathbf{p}_5$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - (3 \quad 7)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c_5 - z_5 = \frac{-1}{2} < 0$$

Como se puede ver, se ha restaurado la prueba de optimalidad; por tanto, la nueva solución óptima es:

$$\mathbf{x}_B^{*'} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Y el nuevo valor óptimo de la función objetivo es:

$$\mathbf{z}^{*'} = (3 \quad 7)\begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix} = 325$$

Si se comprueba este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3
s.t.
0.5X1+X2+X3 <= 50
0.5X1+3X2+X3 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 325.0000

VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
     X1           50.000000        0.000000
     X2           25.000000        0.000000
     X3            0.000000        1.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)           0.000000           5.500000
  3)           0.000000           0.500000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

f)

De acuerdo con la redacción de este inciso, el modelo modificado queda definido como:

$$\begin{aligned}
&Máx\ z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 17x_4 \\
&s.a \\
&\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 50 \quad \text{Restricción de azúcar} \\
&\tfrac{1}{2}x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100 \quad \text{Restricción de chocolate}
\end{aligned}$$

con $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Es decir, el análisis de sensibilidad consiste en agregar una nueva variable; de las condiciones, la nueva variable es x_4, la cual contiene los parámetros siguientes: $c_4 = 17$ y $\mathbf{p}_4^{\mathbf{t}} = (3 \quad 4)$. Además de suponer que la base actual aún es óptima, con la introducción de la nueva variable, ¿Sugarco deberá producir barras de caramelo del tipo 4?

Al calcular $c_4 - z_4$ tenemos:

$$c_4 - z_4 = c_4 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{p}_4$$

$$c_4 - z_4 = 17 - (5 \ \ 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 17 - (5 \ \ 7)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 - z_4 = 1 > 0$$



De acuerdo con este resultado, la base actual cambiará; entonces aplicamos el algoritmo simplex con arreglo tabular para restaurar la optimalidad y, por ende, determinar la nueva base y el nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Al aplicar el algoritmo simplex con arreglo tabular, la *variable entrante* es x_4. Ahora bien, para determinar la variable saliente, hacemos lo siguiente:

1. Se actualiza la columna entrante mediante:

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{p}_4$$

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enseguida, se agregan estos datos en la tabla óptima, tal como se observa en la tabla B.32.

[ENTRA TABLA A.32]

Tabla A.32

C_j		3	7	5	17	0	0		
C_B	*VB*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	*LD*	ϴ
5	X_3	1/2	0	1	5/2	3/2	-1/2	25	10
7	X_2	1/2	1	0	½	-1/2	1/2	25	50
$C_j - z_j$	*Z*	-3	0	0	1	-4	-1	300	

[TERMINA TABLA A.32]



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Nótese que la tabla A.32 se genera usando la misma tabla que cuando se encontró la solución óptima del modelo original, solo que se le agregó la nueva columna de la variable x_4 actualizada, así como la correspondiente al valor $c_4 - z_4 = 1$, antes calculado.

Al aplicar el algoritmo simplex, entonces se genera la tabla A.33.

[ENTRA TABLA A.33]

Tabla A.33

C_j		3 7 5 17	0 0		
C_B	VB	$X_1X_2X_3X_4$	X_5X_6	LD	ϴ
17	X_4	1/5 0 2/5 1	3/5 -1/5	10	
7	X_2	2/5 1 -1/5 0	-4/5 3/5	20	
C_j - z_j	Z	-16/5 0 -2/5 0	-23/5 -4/5	310	

[TERMINA TABLA A.33]

Por tanto, se restaura la optimalidad. De este modo, la nueva solución y el nuevo valor óptimos de la función son:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^{*'} = \begin{pmatrix} x_4^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{z}^{*'} = 310$$

Con base en este resultado, Sugarco debe producir barras del tipo 4.



Si se comprueba este resultado con Lindo, se tiene que la codificación del modelo es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
MAX 3X1+7X2+5X3+17X4
s.t.
X1+X2+X3+3X4 <= 50
2X1+3X2+X3+4X4 <= 100

END
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Y cuya salida es:

[ENTRA TEXTO DE PROGRAMA]

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 310.0000

VARIABLE       VALUE          REDUCED COST
     X1           0.000000          3.200000
     X2          20.000000          0.000000
     X3           0.000000          0.400000
     X4          10.000000          0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
   2)            0.000000             4.600000
   3)            0.000000             0.800000

NO. ITERATIONS = 2
```

[TERMINA TEXTO DE PROGRAMA]

Conclusión

Se llega a los mismos valores.

[TERMINA PROBLEMA DE APLICACIÓN]



Referencias bibliográficas [T1]

Arreola J. (2003). *Programación lineal: Una introducción a la toma de decisiones cuantitativa.* México: Thomson.

Bueno G. (1987). *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad. México: Trillas.*

Gaytán J. (1992). *Principios de modelado y métodos de optimización Parte I: Programación lineal.* México: ITESM Campus Toluca.

Winston W. (2005). *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos.* México: Thomson.

Referencias electrónicas [T1]

http://books.google.com.mx/books?id=pqkQPu7jhV0C&pg=PA131&dq=sensibilidad+en+coeficiente+de+funcion+objetivo&hl=es&sa=X&ei=kgD4UZjaOIvc9QS-8oHAAQ&ved=0CDIQ6AEwAQ#v=onepage&q=sensibilidad%20en%20coeficiente%20de%20funcion%20objetivo&f=false

http://books.google.com.mx/books?id=VqjhIZhsITsC&pg=PA351&dq=sensitivity+analysis+in+right-hand+sides&hl=es&sa=X&ei=2Vr4UdPUK8i8qgGEjoBg&ved=0CF4Q6AEwBQ#v=onepage&q=sensitivity%20analysis%20in%20right-hand%20sides&f=false

http://books.google.com.mx/books?id=10dI4EnerKAC&pg=PA157&dq=sensibilidad+a%C3%B1adiendo+nueva+variable&hl=es&sa=X&ei=u-v4UdujM4P88gS2rIAQ&ved=0CFYQ6AEwCA#v=onepage&q=sensibilidad%20a%C3%B1adiendo%20nueva%20variable&f=false



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Aplicación de modelos de redes en la solución de problemas para la toma de decisiones

Modelo de redes aplicado al problema de programación de la producción [t1]

Un problema de programación de la producción puede verse como un problema de mezcla de producción para varios periodos hacia el futuro. Se quieren determinar los niveles de producción que permitirán a la compañía obtener el mínimo costo (o la máxima ganancia), cumpliendo con los requerimientos de las limitaciones en mano de obra, maquinaria, materiales, espacio de almacenamiento, requisito de demandas, etc. En general, los problemas de programación de la producción tienen naturaleza recurrente, es decir que se presentan un periodo tras otro, solo que con algunas variaciones en ciertos datos, como por ejemplo en las demandas, o en las disponibilidades de algunos recursos.

Lo anterior quiere decir que estos problemas requieren una toma de decisiones con la misma frecuencia. Por este motivo, los modelos de programación lineal se usan extensivamente en este campo, pues una vez que un modelo fue resuelto para un periodo, basta con repetir la estrategia de solución para los datos del nuevo periodo y así obtener recomendaciones acerca del programa óptimo de producción en su conjunto.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Supongamos que un fabricante debe cumplir con los siguientes compromisos para el primer trimestre:

[entra tabla]

Tabla 3.1

Mes	Enero	Febrero	Marzo
Unidades	10.000	30.000	20.000

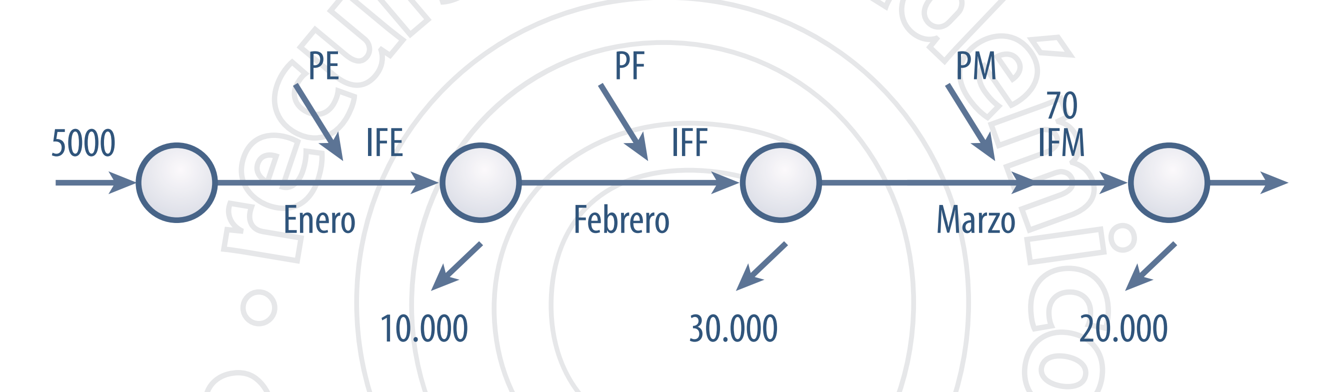
[fin de tabla]


Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

La capacidad mensual de producción de la planta es de 20 000 unidades. El costo unitario de producción varia cada mes del siguiente modo: enero $10, febrero $9 y marzo $12. La compañía estima en $3 el costo de almacenamiento de cada unidad que tenga en inventario en la bodega al cierre del mes. La capacidad de almacenamiento de la bodega es de 22 000 unidades. La empresa tiene actualmente en el inventario 500 unidades y desea tener 700 al final del periodo.

El problema a resolver consiste en determinar el programa de producción mensual que minimiza los costos totales del trimestre. Para efectos de la contabilización del inventario, supone que la producción se realiza durante todo el mes y el despacho se efectúa el último día de mes (véase figura 3.1).

[entra figura]



<<injertos de figura: 5000 PE IFE Enero 10.000 PF IFF Febrero 30.000 PM 70 IFM Marzo 20.000>>

Figura 3.1
[fin de figura]

Solución

Vamos a definir las siguientes variables de decisión:
P_i : Cantidad de artículos producidos en el mes i.
IF_i: Unidades en el inventario al final del mes i.

Sujeto a las siguientes restricciones:

1. Restricciones para la capacidad de producción por mes:

[entra tabla]

Tabla 3.2

Enero	PE ≤ 20.000
Febrero	PF ≤ 20.000
Marzo	PM ≤ 20.000

2. Restricciones para los niveles de inventarios actual y al final del periodo de planeación:

[entra tabla]

Tabla 3.3

Inventario inicial (final diciembre)	IFD = 500
Inventario final (marzo)	IFM = 700

3. Restricciones de balance para el cubrimiento de la demanda comprometida por mes:

[entra tabla]

Tabla 3.4

Enero	IFD + PE =10.000 + IFE
Febrero	IFE + PF = 30.000 + IFF
Marzo	IFF + PM = 20.000 + IFM

4. Restricciones para la capacidad de almacenamiento de la bodega al final de cada mes:

[entra tabla]

Tabla 3.5

Enero	$IFD + PE \leq 22.000$
Febrero	$IFE + PF \leq 22.000$
Marzo	$IFF + PM \leq 22.000$

La función objetivo para minimizar el total de los costos se formula de la siguiente manera:

$Z = 10(XE) + 9(XF) + 12(XM)$
(costo de producción)

$+ 3(IFE + IFF + EFM)$
(del costo de almacenamiento)

[TERMINA PROBLEMA]

Modelo de redes aplicado para el programa de corte óptimo [T1]

En seguida se presenta un problema resuelto para el modelo de redes aplicado para el programa de corte óptimo.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

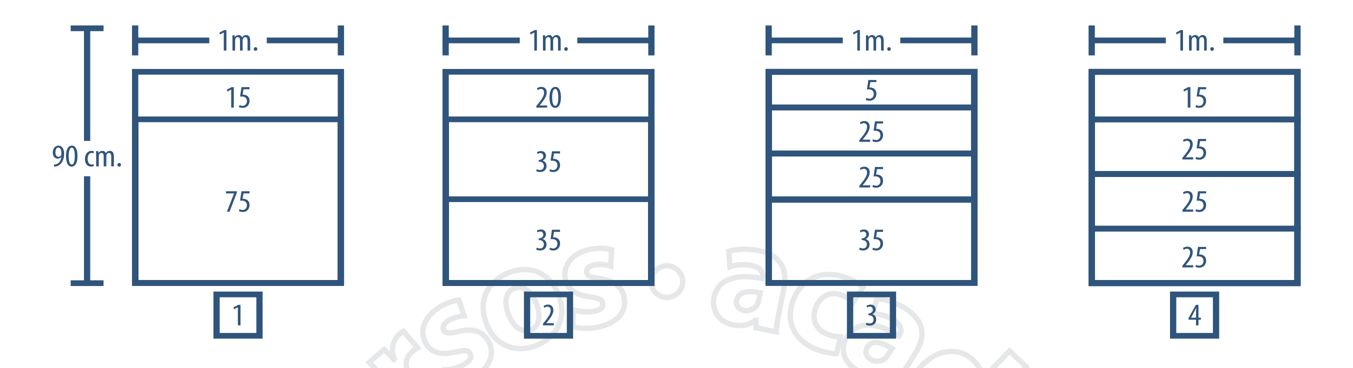
Una empresa que produce papel en rollos de 90 cm de ancho y 100 m de largo, recibe pedidos para despachar rollos de dimensiones menores. Por tanto se requiere cumplir con las siguientes ordenes de producción: (200 m de ancho 75 cm), (500 m de ancho 35 cm) y (300 metros de ancho 25 cm). La compañía desea determinar a partir de los rollos de tamaño estándar, el mejor programa de corte posible de manera que se minimice el desperdicio de papel.

Solución

La solución a este problema implica despachar dos o más rollos para obtener la longitud pedida de cada uno de los anchos, lo anterior debido a que el rollo estándar solo mide 100 m de largo. Es fácil verificar que el papel que se desperdicie de todo rollo sea inferior a 25 cm. De lo anterior sería importante determinar todas las formas en que se puede cortar un rollo de ancho de 90 cm, para obtener anchos de 75, 35 y 25 cm. Si tomamos como referencia un metro del rollo del ancho estándar de 90 cm, se obtendrán las siguientes posibles combinaciones de formas de corte:



[entra figura]



<<Injertos de figura 90 cm 1 m 15 75 1 1 m 20 35 35 2 1 m 5 25 25 35 3 1 m 15 25 25 25 4>>

Figura 3.2

[fin de figura]

Del gráfico anterior, observamos que hay cuatro modalidades de corte. Para cada combinación se obtiene una configuración de anchos necesarios con un desperdicio específico según el caso. Las características para cada uno de las cuatro combinaciones de cortes posibles se resumen en la tabla 3.6.

[entra tabla]

Tabla 3.6

Forma de corte	Metros de ancho			Desperdicio
	0.75	0.35	0.25	
1	1	0	0	0.15
2	0	2	0	0.20
3	0	1	2	0.05
4	0	0	3	0.15

[fin de tabla]



A continuación podemos definir las variables de decisión del modelo como sigue:

Xi: número de metros del rollo estándar (90 cm) cortados en la modalidad i.

Sujeta a las siguientes restricciones:

1. Restricciones de demanda a cubrir de cada tipo de ancho (metros):

$1X1 \geq 200$
$2X2 + 1X3 \geq 500$
$2X3 + 3X4 \geq 300$
con $Xi \geq 0$ (Restricciones de no negatividad)

Función objetivo: minimizar desperdicio: $0.15X1 + 0.20X2 + 0.05X3 + 0.15X4$

[TERMINA PROBLEMA]

Cabe mencionar que el modelo de programación lineal podría generar soluciones no enteras en las variables de decisión. Por tanto es necesario considerar para este tipo de modelos el uso de la programación entera.

Modelo de redes para el problema de transporte número 2 [T2]

Los modelos de transporte son una de las más conocidas aplicaciones de la programación lineal. Se presentan cuando por ejemplo necesitamos tomar decisiones con respecto a las mejores rutas de distribución de artículos desde m centros productivos hasta n bodegas o almacenes.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Una compañía embotelladora que tiene plantas ubicadas en A, B y C con las siguientes capacidades (véases tabla 3.14):

[entra tabla]

Tabla 3.14

Planta	Planta A	Planta B	Planta C
Producción (caja/mes)	100.000	120.000	100.000

[fin de tabla]

La empresa surte a cuatro distribuidores localizados en diferentes zonas del país. La demanda esperada de cada uno de los distribuidores se observa en la tabla 3.15.

[entra tabla]

Tabla 3.15

Distribuidor	D1	D2	D3	D4
Demanda (caja/mes)	50.000	70.000	62.000	120.000

[fin de tabla]

Los costos de transportación unitarios por caja desde cada planta hacia cada distribuidor se aprecian en la tabla 3.16.

[entra tabla]

Tabla 3.16

	Plantas		
Distribuidores	**PA**	**PB**	**PC**
D1	100	200	300
D2	120	150	200
D3	150	200	150
D4	210	180	130

[fin de tabla]



¿De qué manera deben programarse los envíos desde las plantas hacia los distribuidores para tener el mínimo costo de transportación?

Solución

El problema puede esquematizarse como se muestra adelante.

[entra figura]

Calí
Bogotá
Cartagena
Plantas
PA
PB
PC
Calí
Cúcuta
Ibagué
Riohacha
D1
D2
D3
D4

<<Injertos de figura: Medellín Bogotá Cartagena Plantas Cali Cúcuta Ibagué Riohacha Distribuidoras>>



Figura 3.4
[fin de figura]

La definición de las variables de decisión es como sigue:
Xij: Cantidad de cajas enviadas de la planta i hasta la bodega j.

Sujeta a:

1. Restricciones de capacidad en las plantas:

(Planta A): XMCA + XMCU + XMI + XMR $\leq$ 100.000
(Planta B): XBCA + XBCU + XBI + XBR $\leq$ 120.000
(Planta C): XCCA + XCCU + XCI + XCR $\leq$ 100.000

2. Restricciones para las demandas de los distribuidores:

XMCA + XBCA + XCCA $\geq$ 50.000
XMCU + XBCU + XCCU $\geq$ 70.000
XMI + XBI + XCI $\geq$ 62.000
4 XMR + XBR + XCR $\geq$ 120.000
Xij $\geq$ 0 (restricciones de no negatividad)

Función objetivo:

Minimizar costo (Z) = 100XMCA + 120XMCU + 150XMI + 210XMR + 200XBCA + 150XBCU + 200XBI + 180XBR + 300XCCA + 200XCCU + 150XCI + 130XCR

[TERMINA PROBLEMA]

Dado que el objetivo del problema anterior es minimizar el costo total de transporte, es de esperarse que a cada distribuidor se le envíe justamente lo que necesita, motivo por el cual todas las restricciones de demanda se cumplirán como si fueran igualdades. Debe tenerse en cuenta que cuando la demanda total es inferior a la oferta total, un problema de transporte tendría una solución en la cual se satisfacen todas las demandas sobrando capacidad en las plantas, pero cuando la demanda total es superior a la oferta total, el problema no tendría solución.

Para este último caso se tendría que efectuar un balanceo de oferta y demanda totales, lo cual consiste en agregar al modelo una planta ficticia con capacidad similar a la que haga falta para igualar la demanda total.

[T2] Variante discreta para el modelo de redes aplicado al transporte

- Modelo de transporte: minimizar el costo total de transporte entre los nodos de origen y los de destino, satisfaciendo la demanda, y considerando la capacidad. Si no hay balance entre la capacidad y la demanda entonces se formula con desigualdades.

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1..m$$

$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z$$

xij: unidades a enviar del nodo i al nodo *j*.
cij: costo unitario de transporte del nodo *i* al nodo *j.*
ai: unidades de capacidad en el nodo *i.*
bj: unidades de demanda en el nodo *j.*

- Modelo de flujo de red con costo mínimo: embarcar los recursos disponibles a través de la red y considerando todos los posibles nodos con oferta o capacidad para satisfacer la demanda a un costo mínimo.

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = b_i, \qquad j = 1..m$$

$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in Z$$



xij: unidades enviadas del nodo *i* al nodo *j* (flujo).
cij: costo unitario de transporte del nodo *i* al nodo *j*.
bi: capacidad o demanda disponible en el nodo *i*.
capacidad: bi > 0
demanda: bi < 0
transbordo: bi = 0

Modelo de redes aplicado al problema de costo fijo número 2 [T2]

A continuación se muestra un ejemplo resuelto con detalle para este caso de costo fijo.

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Un negocio debe cubrir el gasto de ciertos costos fijos como renta, electricidad, seguros, nómina, gastos de publicidad, etc., que ocurren naturalmente de forma indiferente al volumen de venta del negocio. No obstante, también es previsible que los gastos fijos no sean estáticos ya que pueden variar de manera imprevisible de acuerdo con cambios significativos en la operación. Así entonces, un costo indirecto podemos decir que solo es válido para un rango específico de operación. Por ejemplo, un costo indirecto será diferente cuando el volumen de producción sea 500 unidades que si fuera 500 000.

Solución

Supongamos entonces que dicha empresa manufacturera está planeando su siguiente ciclo de producción. La compañía puede producir tres productos, los cuales requieren tres procesos de manufactura: maquinado, triturado y ensamble. En la tabla 3.17 se muestra la cantidad de horas requeridas para producir cada producto en cada uno de los tres procesos. Así también se muestra la capacidad total de horas disponibles para cada una de las tres operaciones.

[Entra tabla]

Tabla 3.17 Datos operativos para el problema de decisión del costo fijo.

Corregir: operación con acento, unidad y disponibles en bajas.

[fin de tabla]



La empresa ha estimado que la contribución marginal de cada unidad de producto 1 es de $48 dólares. En el caso de los productos 2 y 3 tenemos que estos datos son $55 y $50 dólares, respectivamente. Los costos fijos de producción para los productos 2 y 3 son de $800 y $900 dólares mensuales, respectivamente. Sin embargo, la manufactura del producto 1 requiere una modificación en la línea de producción lo cual implica enfrentar un costo adicional de $100 dólares mensuales. Las ventas estimadas cubren el total de la capacidad de manufactura. El planteamiento del problema consiste en identificar la mezcla de productos que pueda lograr maximizar la utilidad obtenida por la compañía.

Para modelar el planteamiento del problema vamos a utilizar seis variables de decisión. Tenemos aquí tres variables para determinar el volumen a producir de cada uno de los tres productos. Adicionalmente tenemos tres variables binarias las cuales nos van a ser útiles para moldear la aplicación del costo fijo para cada uno de las tres líneas de producción en cuestión. Así entonces tenemos la formulación de la siguiente manera:

$X_i =$ Cantidad del producto i a ser producido.
Donde: $X_i \geq 0, i = 1,2,3$.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i > 0 \\ 0, & \text{si } X_i = 0 \end{cases}$$

Primero debemos asegurar que las relaciones entre X_i y Y_i se den. La implementación de dicha relación se hará mediante la aplicación de las siguientes restricciones:

$$X_1 \leq M_1 Y_1$$
$$X_2 \leq M_2 Y_2$$
$$X_3 \leq M_3 Y_3$$

La constante M_i que ha sido incluida en la parte derecha de la restricción tiene la finalidad de expresar el valor del límite superior que puede ser calculado para las variables X_i. Es fácil comprender que el valor asignado de las constantes M_i sean números grandes; por ejemplo M_i =1e6. También es fácil verificar que si la variable X_i asume un valor diferente que 0, entonces la variable Y_i deberá asumir el valor 1. Alternativamente, si la variable X_i = 0, entonces la variable Y_i para cumplir la restricción deberá calcular un valor de 0 o de 1. Ahora bien que es lo que finalmente provoca que el modelo se decida por elegir en este último caso el valor de 0 para Y_i. La respuesta a esto está en la orientación de la función objetivo. En nuestro caso recordemos que buscamos minimizar el gasto fijo, por tanto es fácil verificar que el modelo va a elegir el valor mínimo posible para las variables binarias Y_i. Por tanto, podemos concluir que para cada variable X_i = 0, el modelo asignara Y_i = 0 porque además de que es factible también resulta en un mejor valor para la función objetivo en cuestión.



Ahora bien, identificar el valor preciso para cada M_i puede ser una buena idea en lugar de tan solo dejar expresado arbitrariamente un límite superior suficientemente alto. S_i acaso en nuestro caso de estudio tuviéramos la información acerca de que la compañía solo puede manufacturar y/o vender hasta un límite de 60 unidades del producto X_1, así entonces podríamos definir M_1=60.

En nuestro caso de estudio no tenemos precisados explícitamente los límites superiores para las variables X_i. No obstante, en algunos casos es posible derivarlos, lo haremos a continuación. Consideremos la variable X_1 de nuestro problema. Si quisiéramos obtener el límite superior para dicha variable tan solo hace falta asumir que la compañía producirá 0 unidades de los productos X_2 y X_3. Ahora bien si verificamos la capacidad de producción en la operación de maquinado podremos calcular que la cantidad máxima del producto X_1 será igual a 600 horas dividido por 2 horas por producto esto nos da entonces una capacidad máxima de 300 unidades para X_1. Si aplicamos el mismo procedimiento para la operación de triturado obtenemos entonces 300/6=50 unidades para X_1. En la operación de ensamble tenemos 400/5=800 unidades de X_1. Por tanto es ahora fácil verificar que el número máximo de unidades de X_1 que la compañía puede producir es igual a 50.

Si aplicamos el mismo concepto para el resto de los productos en cada una de las operaciones tenemos que el máximo de unidades que es posible producir para X_2: Mín$\left(\frac{600}{3}, \frac{300}{3}, \frac{400}{6}\right)$= 66.67, y el máximo de unidades de X_3 es: Mín $\left(\frac{600}{6}, \frac{300}{4} \text{ y } \frac{400}{2}\right)$ = 75. Por tanto podemos concluir especificando los limites superiores para X_1,X_2 y X_3 como M_1 = 50, M_2 = 67 y M_3 = 75. Luego entonces podemos redefinir nuestras restricciones de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - 50Y_1 \leq 0 \\ X_2 - 67Y_2 \leq 0 \\ X_3 - 75Y_3 \leq 0 \end{array}\right\}$$

A continuación tenemos la definición de las restricciones que son requeridas para limitar la capacidad de horas disponibles para producción en cada una de las tres operaciones de manufactura involucradas:

$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 600\}$ Operación de maquinado.

$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 300\}$ Operación de trituración.

$5X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 400\}$ Operación de ensamble.

Para la definición de la función objetivo tenemos lo siguiente:

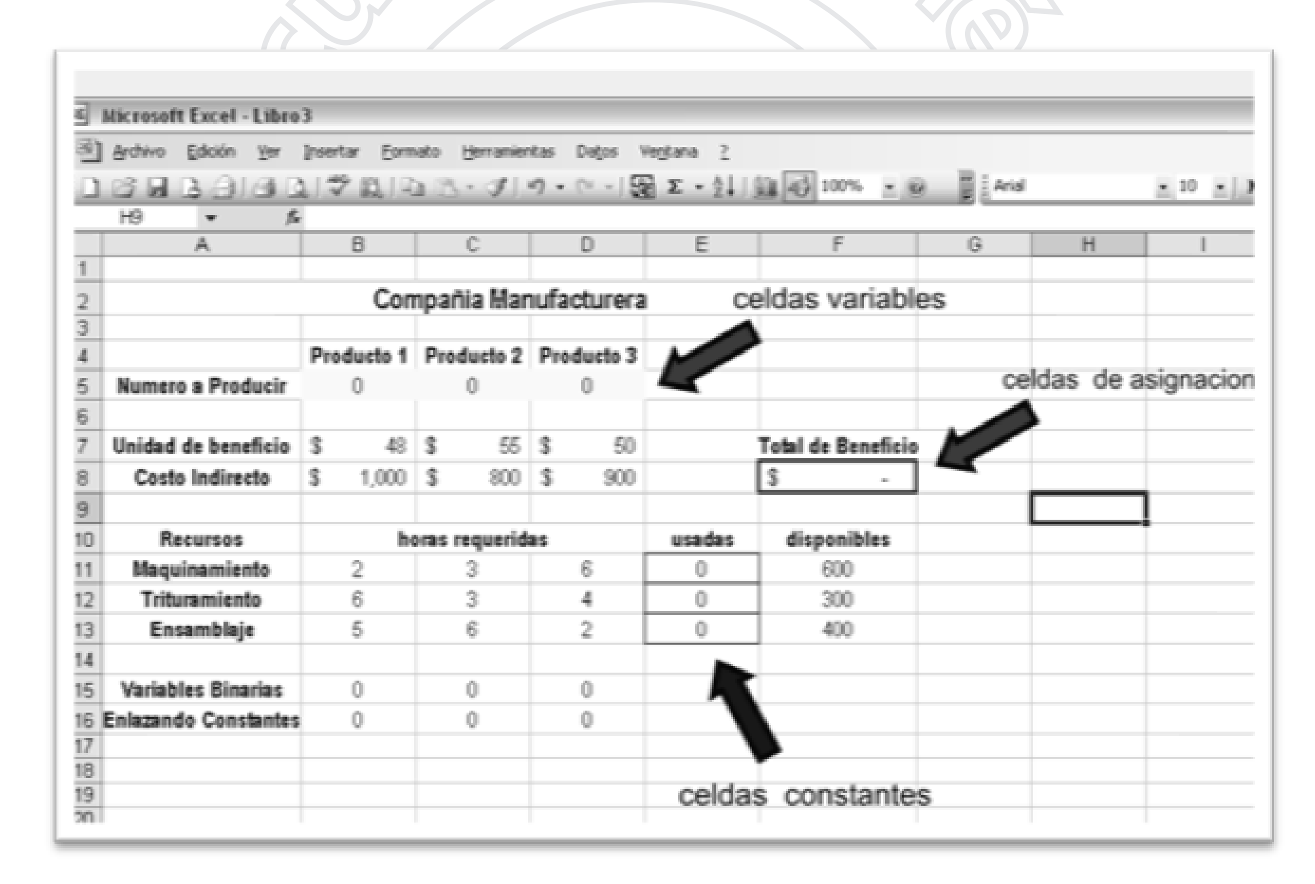
Máx: $48X_1 + 55X_2 + 50X_3 - 1000Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3$



Los primeros tres elementos en la función objetivo calculan el ingreso total generado por la producción y venta de los tres productos. Los tres términos restantes de la función objetivo sustraen los costos fijos de manera específica para cada uno de los tres productos producidos. Por ejemplo, si X_1 asume un valor positivo, entonces la variable binaria Y_1 deberá calcular un valor unitario indicando a la función objetivo que corresponde deducir $1 000 para reflejar el costo fijo correspondiente. Por otra parte, si X_1 es igual a 0, entonces Y_1 será 0 también, indicando que no hay costo fijo que cubrir. Y así se hace sucesivamente para X_2, Y_2 y X_3, Y_3.

La implementación del modelo puede ser revisado en la figura 3.10. En el rango de celdas B5:D5 están las variables X_1, X_2 y X_3, mientras que en el rango de celdas B15:D15 representa a las variables binarias Y_1, Y_2, Y_3. Los coeficientes de la función objetivo se encuentran en el rango de celdas B7:D8. La función objetivo está en la celda F8.

[entra figura]





<<Injertos: Compañía manufacturera celdas variables Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 0 0
Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio
Celdas de asignación Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas disponibles Maquinamiento 2 3 6 0 600 Trituramiento 6 3 4 0 300 Ensamblaje 5 6 2 0 400 Variables binarias 0 0 0 Enlazando constantes 0 0 0 celdas constantes>>

Figura 3.10 Modelo para el problema de decisión del costo fijo.
[fin de figura]

En la tabla 3.18 se precisan las siguientes formulaciones que corresponden a la implementación del modelo en Excel.

[entra tabla]

Tabla 3.18

Celda	Fórmula	Copiar a
B16	B5-MIN($F$11/B11,$F$12/B12,$F$13/B13)*B15	C16:D16
E11	SUMPROD(B11:D11,$B$5:$D$5)	E12:E13
F8	SUMPROD(B7:D7,B5:D5) – SUMPROD(B8:D8,B15:D15)	-

[fin de tabla]

El rango de celdas B11:D13 contiene los coeficientes para los requerimientos unitarios de cada producto y en cada operación. Las constantes de capacidad para las operaciones de maquinado, triturado y ensamble se especifican en el rango de celdas F11 a la F13. Por su parte, el requerimiento de capacidad resultante para cada operación se expresa en el rango de celdas E11:E13. Finalmente, la implementación de las restricciones que relacionan a las variables Xi y Yi se expresa en el rango de celdas B16: D16 a través del uso de la fórmula:

$$= B16 - MIN(\$F\$11/B11,\$F\$12/B12,\$F\$13/B13)*B15$$

Esta fórmula está copiada en el rango de celdas C16:D16. Como se puede apreciar en la formulación anterior, en lugar de definir valores arbitrarios para M_i, implementamos fórmulas que automáticamente calculen los valores mínimos necesarios para cada M_i. En la figura 3.11 se muestra el diálogo de Solver, el cual indica los parámetros requeridos para resolver el modelo. Nótese que las variables X_i y Y_i aparecen en el rango de celdas B5:D5 y B15:D15, respectivamente.

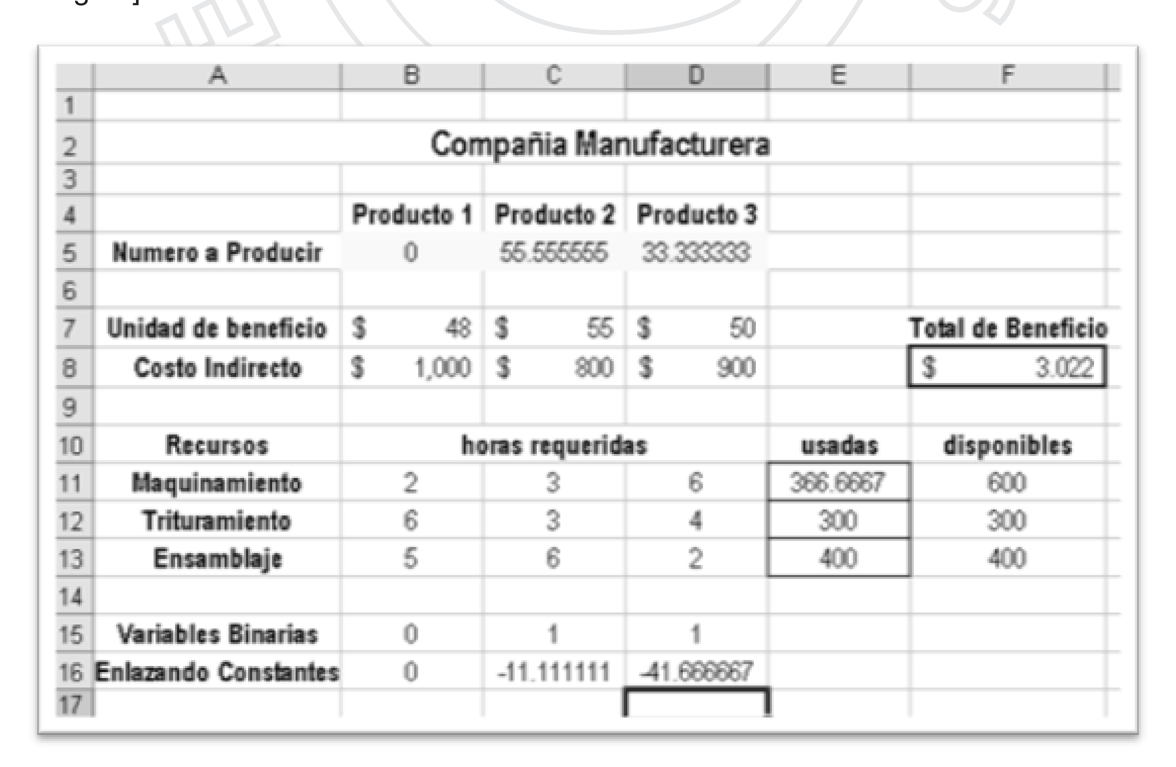
[entra figura]





Figura 3.11 Ejemplo de un diálogo de Solver.
[fin de figura]

[entra figura]



	A	B	C	D	E	F
1						
2			Compañia Manufacturera			
3						
4		Producto 1	Producto 2	Producto 3		
5	Numero a Producir	0	55.555555	33.333333		
6						
7	Unidad de beneficio	$ 48	$ 55	$ 50		Total de Beneficio
8	Costo Indirecto	$ 1,000	$ 800	$ 900		$ 3.022
9						
10	Recursos		horas requeridas		usadas	disponibles
11	Maquinamiento	2	3	6	366.6667	600
12	Trituramiento	6	3	4	300	300
13	Ensamblaje	5	6	2	400	400
14						
15	Variables Binarias	0	1	1		
16	Enlazando Constantes	0	-11.111111	-41.666667		
17						



Eva S. Hemández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

<<Injertos: Compañía manufacturera Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 55.555555 33.333333

Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio $ 3.022
Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas 366.6667 300 400 disponibles 600 300 400 Maquinamiento 2 3 6 Trituramiento 6 3 4 Ensamblaje 5 6 2 Variables binarias 0 1 1 Enlazando constantes 0 −11.111111 −41.666667>>

Figura 3.12 Solución óptima para el problema.

[fin de figura]

El análisis de la solución muestra que la compañía debe producir cero unidades del producto 1, 55.55 unidades del producto 2 y 33.33 unidades del producto 3 (*X1* = 0, *X2* = 55.55, *X3* = 33.33). Es fácil verificar que se han asignado valores binarios consistentes en el rango de celdas B15:D15 (*Y1* = 0, *Y2* = 1, *Y3* = 1). El rango de celdas B16:D16 indica las cantidades por las cuales los valores para *X1*, *X2* y *X3* (en el rango de celdas B5:D5) están por debajo del límite superior. Si redondeamos los valores de *X2* y *X3* a 55 y 33, obtenemos una solución entera con una función objetivo de $2 975. Para resolver el modelo con una solución óptima entera, podemos agregar una restricción de integralidad para condicionar las variables *Xi* y después volver a ejecutar el modelo. Los resultados se muestran en la figura 3.13.

[ENTRA FIGURA]

Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

	A	B	C	D	E	F
1						
2			Compañia Manufacturera			
3						
4		Producto 1	Producto 2	Producto 3		
5	Numero a Producir	0	56	32		
6						
7	Unidad de beneficio	$ 48	$ 55	$ 50		Total de Beneficio
8	Costo Indirecto	$ 1,000	$ 800	$ 900		$ 2,980
9						
10	Recursos		horas requeridas		usadas	disponibles
11	Maquinamiento	2	3	6	360	600
12	Trituramiento	6	3	4	296	300
13	Ensamblaje	5	6	2	400	400
14						
15	Variables Binarias	0	1	1		
16	Enlazando Constantes	0	-10.666667	-43		
17						

<<Injertos: Compañía manufacturera Producto 1 Producto 2 Producto 3 Número a producir 0 56 32
Unidad de beneficio $ 48 $ 55 $ 50 Total de beneficio $ 2,980
Costo indirecto $ 1 000 $ 800 $ 900 Recursos horas requeridas usadas 360 296 400 disponibles 600 300 400 Maquinamiento 2 3 6 Trituramiento 6 3 4 Ensamblaje 5 6 2 Variables binarias 0 1 1 Enlazando constantes 0 −10.666667 −43>>

Figura 3.13 Resultado del modelo con restricciones de integralidad.

[fin de figura]

Es importante precisar que se requiere un mayor esfuerzo computacional para obtener una solución entera con respecto a la solución obtenida en la primera corrida. No obstante el esfuerzo vale la pena ya que la solución entera obtiene una solución mejorada con respecto a la solución redondeada.

[TERMINA PROBLEMA]

3.13 Modelo de redes para el problema de ubicación óptima de instalaciones [t1]

[INICIA PROBLEMA]

Problema resuelto

Los administradores de una cadena de restaurantes operan dos marcas digamos *X* e *Y*. La compañía está considerando abrir nuevas ubicaciones en la ciudad. Existen 10 lugares diferentes disponibles en donde la compañía pueda construir nuevos restaurantes. Puede hacerlo decidiendo por cualquiera de las dos marcas, sin embargo, es importante considerar que la compañía no desea ubicar dos sucursales de la misma marca a menos de 15 km de distancia una de la otra. La tabla 3.20 muestra la estimación del valor presente neto (VPN) respecto a la decisión de ubicación de cada tipo de marca y dependiendo de donde se haga. Para cada uno de los sitios probables, adicionalmente se especifica cuáles son las ubicaciones que geográficamente están dentro de un radio de 15 km uno de otro.

[entra tabla]

Tabla 3.20

Sitio / ubicación	Marca *X*	Marca *Y*	Otras ubicaciones en un radio de 15 km
1	$11.8	$16.2	2,3,4
2	13.3	13.8	1,3,5
3	19.0	14.6	1,2,4,5
4	17.8	12.4	1,3
5	10.0	13.7	2,3,9
6	16.1	19.0	7
7	13.3	10.8	6,8
8	18.8	15.2	7
9	17.2	15.9	5,10
10	14.4	16.8	9

[fin de tabla]

Solución

Como definición de las variables de entrada de nuestro modelo, se hará una para el VPN de los ingresos provenientes de la construcción de sucursales de la marca *X* y otra más para los de la marca *Y*. Tenemos aquí entonces:

R_i - ingresos de construcción de sucursal de la marca *X* en el sitio *i*.
O_i - ingresos de construcción de sucursal de la marca *Y* en el sitio *i*.

Suponga adicionalmente que la compañía como elemento de decisión, desea ubicar una sucursal de la marca *X* si y solo sí también logra ubicar dentro del radio de los 15 km de distancia una sucursal de la marca *Y*. Desarrolle un modelo para determinar la estrategia de ubicación de sucursales que debe seguir la compañía con ambas marca con finalidad de maximizar el VPN total.

Definición de las variables de salida

Requerimos definir dos variables de salida, una que llamaremos X_i, para la marca *X* y otra llamada Y_i para la marca *Y*.

$$X_{i_{bin}} \left\{ \frac{0 \text{ NO se construye la sucursal } "X" \text{ en la ubicación } i}{1 \text{ SI se construye la sucursal } "X" \text{ en la ubicación } i} \right\}$$

$$\text{para } i = 1 \ldots 10$$

Acentuar sí, eliminar comillas de *x* y *y*

$$Y_{i_{bin}} \left\{ \frac{0 \text{ NO se construye la sucursal } "Y" \text{ en la ubicación } i}{1 \text{ SI se construye la sucursal } "Y" \text{ en la ubicación } i} \right\}$$

$$\text{para } i = 1 \ldots 10$$

Acentuar sí, eliminar comillas de *y*


Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Definición de las restricciones

La definición para las restricciones del problema, tienen que ver con asegurar de que no haya sucursales de la misma marca (sea *X* o *Y*) que estén a menos de 15 km de distancia una de la otra. Por tanto, para cada conjunto de ubicaciones que geográficamente estén a menos de 15 km es entonces necesario indicar que solo cuando mucho una sola sucursal es posible construir. Para ello se indican las siguientes restricciones para la marca *X*.

SITIO 1: $X1 + X2 + X3 + X4 \leq 1$
SITIO 2: $X1 + X2 + X3 + X5 \leq 1$
SITIO 3: $X1 + X2 + X3 + X4 + X5 \leq 1$
SITIO 4: $X1 + X3 + X4 \leq 1$
SITIO 5: $X2 + X3 + X5 + X9 \leq 1$
SITIO 6: $X6 + X7 \leq 1$
SITIO 7: $X6 + X7 + X8 \leq 1$
SITIO 8: $X7 + X8 \leq 1$
SITIO 9: $X5 + X9 + X10 \leq 1$
SITIO 10: $X9 + X10 \leq 1$

A continuación se indican las siguientes restricciones del mismo tipo pero en esta ocasión aplicado para las sucursales de la marca *Y*:

SITIO 1: $Y1 + Y2 + Y3 + Y4 \leq 1$
SITIO 2: $Y1 + Y2 + Y3 + Y5 \leq 1$
SITIO 3: $Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + Y5 \leq 1$
SITIO 4: $Y1 + Y3 + Y4 \leq 1$
SITIO 5: $Y2 + Y3 + Y5 + Y9 \leq 1$
SITIO 6: $Y6 + Y7 \leq 1$
SITIO 7: $Y6 + Y7 + Y8 \leq 1$
SITIO 8: $Y7 + Y8 \leq 1$
SITIO 9: $Y5 + Y9 + Y10 \leq 1$
SITIO 10: $Y9 + Y10 \leq 1$



A continuación se especifican las restricciones relacionadas con la condición en la que se detalla que una sucursal de la marca *X* puede ser construida si y solo si una sucursal *Y* se encuentra a menos de 15 km de distancia. Para ello se construye el siguiente conjunto de restricciones para cada uno de los probables sitios en donde una sucursal de la marca *X* pueda ser construido.

SITIO 1:	X1 + X2 + X3 + X4 ≤ Y1 + Y2 + Y3 + Y4
SITIO 2:	X1 + X2 + X3 + X5 ≤ Y1 + Y2 + Y3 + Y5
SITIO 3:	X1 + X2 + X3 + X4 + X5 ≤ Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + Y5
SITIO 4:	X1 + X3+ X4 ≤ Y1 + Y3+ Y4
SITIO 5:	X2 + X3 + X5 + X9 ≤ Y2 + Y3 + Y5 + Y9
SITIO 6:	X6 + X7 ≤ Y6 + Y7
SITIO 7:	X6 + X7 + X8 ≤ Y6 + Y7 + Y8
SITIO 8:	X7 + X8 ≤ Y7 + Y8
SITIO 9:	X5 + X9+ X10 ≤ Y5 + Y9+ Y10
SITIO 10:	X9 + X10 ≤ Y9 + Y10

Definición de la función objetivo

La función objetivo busca maximizar el VPN de ambas marcas de restaurantes de acuerdo con la ubicación geográfica en donde se construirán. Se representa de la siguiente manera:

$$Fo_{\text{máx}} \rightarrow \sum_{i=1}^{10} R_i X_i + \sum_{i=1}^{10} O_i Y_i$$

Siendo X_i, Y_i variables del tipo binario, tenemos que la multiplicación por el respectivo flujo de ingreso, sea R_i y O_i en cada caso respectivo, pues obtendremos como resultado el total del VPN.





Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Desarrollo del problema a través de la herramienta Solver

[entra figura]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		VARIABLES DE ENTRADA			VARIABLES DE SALIDA			RESTRICCIONES	
2	sitio	VPN			X	Y			
3		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive
4	1	$11.80	$16.20						
5	2	$13.30	$13.80						
6	3	$19.00	$14.60						
7	4	$17.80	$12.40						
8	5	$10.00	$13.70						
9	6	$16.10	$19.00						
10	7	$13.30	$10.80						
11	8	$18.80	$15.20						
12	9	$17.20	$15.90						
13	10	$14.40	$16.80						
14	SUMA	$151.70	$148.40						

<<INJERTOS>>

	Variables de entrada		Variables de salida		Restricciones	
	VPN					
sitio	Red	Olive	Red	Olive	Red	Olive
1	$11.80	$16.20				
2	$13.30	$13.80				
3	$19.00	$14.60				
4	$17.80	$12.40				
5	$10.00	$13.70				
6	$16.10	$19.00				
7	$13.30	$10.80				
8	$18.80	$15.20				
9	$17.20	$15.90				
10	$14.40	$16.80				
SUMA	$151.70	$148.40				

Figura 3.14

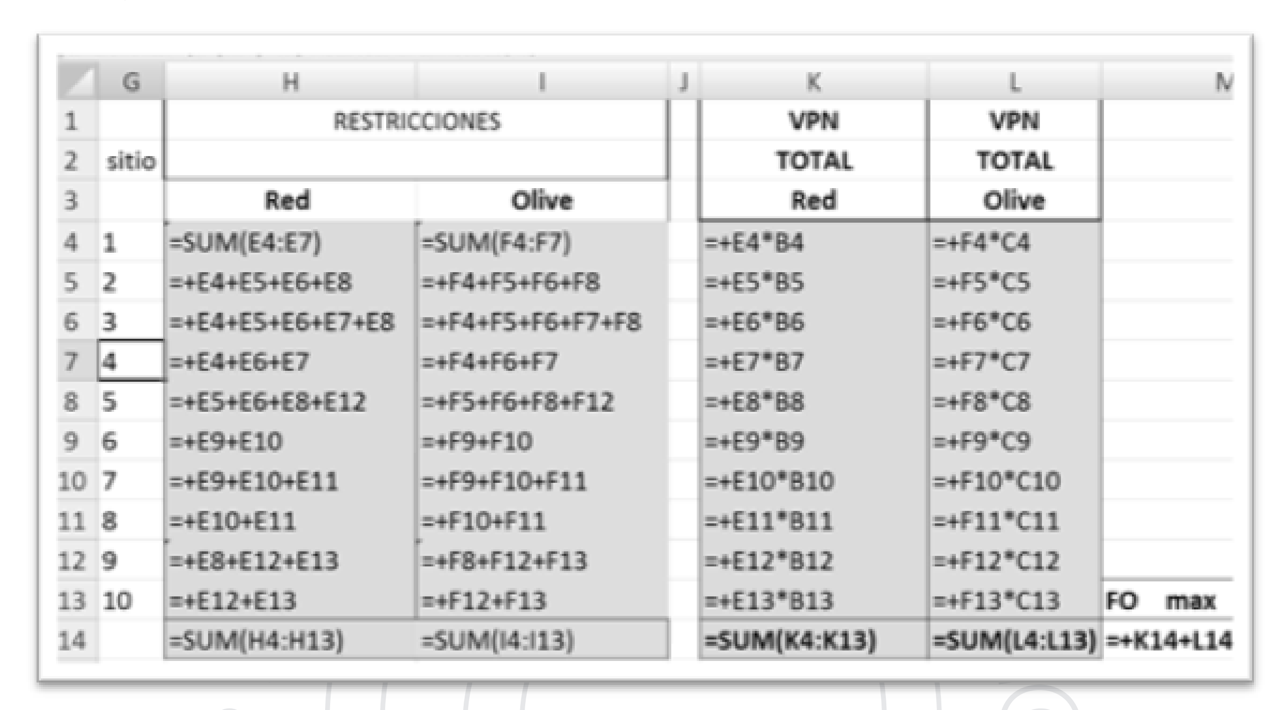
[fin de figura]

Las variables de entrada (R_i, O_i) son los ingresos (VPN) para cada marca *X* y *Y*. Designamos el rango de celdas B4:B13 para la marca X (Ri) y el rango de celdas C4:C13 para la marca Y (O_i). Las variables de salida (X_i, Y_i) se ubicarán en el rango de celdas E4:E13 para la sucursal *X* y F4:F13 para la sucursal *Y*. El rango de celdas H4:I13 se deja para el manejo de las restricciones que aseguren solo cuando mucho una sola sucursal de cada marca en un radio de 15 km de distancia. Las restricciones ya establecidas se introducen en forma de suma y posteriormente en el Solver se les dará la restricción para que esta sea ≤ 1.

Los rangos de celdas para restricciones de las posibles ubicaciones para las sucursales *X* las vamos nombrar en Excel como Olive y Red, para las posibles ubicaciones de las sucursales *Y*. La función objetivo se determina sumando los VPN en su mezcla óptima por tipo de sucursal y posteriormente se suman los dos resultados de ambos negocios. En la figura 3.15 se muestra la formulación a detalle.



[entra figura]



	G	H	I	J	K	L	M
1		RESTRICCIONES			VPN	VPN	
2	sitio				TOTAL	TOTAL	
3		Red	Olive		Red	Olive	
4	1	=SUM(E4:E7)	=SUM(F4:F7)		=+E4*B4	=+F4*C4	
5	2	=+E4+E5+E6+E8	=+F4+F5+F6+F8		=+E5*B5	=+F5*C5	
6	3	=+E4+E5+E6+E7+E8	=+F4+F5+F6+F7+F8		=+E6*B6	=+F6*C6	
7	4	=+E4+E6+E7	=+F4+F6+F7		=+E7*B7	=+F7*C7	
8	5	=+E5+E6+E8+E12	=+F5+F6+F8+F12		=+E8*B8	=+F8*C8	
9	6	=+E9+E10	=+F9+F10		=+E9*B9	=+F9*C9	
10	7	=+E9+E10+E11	=+F9+F10+F11		=+E10*B10	=+F10*C10	
11	8	=+E10+E11	=+F10+F11		=+E11*B11	=+F11*C11	
12	9	=+E8+E12+E13	=+F8+F12+F13		=+E12*B12	=+F12*C12	
13	10	=+E12+E13	=+F12+F13		=+E13*B13	=+F13*C13	FO max
14		=SUM(H4:H13)	=SUM(I4:I13)		=SUM(K4:K13)	=SUM(L4:L13)	=+K14+L14

<<Injertos: Restricciones Sitio Red Olive VPN VPN Total Total Red Olive

Figura 3.15

[fin de figura]

Una vez que se ha definido la totalidad de la formulación en Excel, pasamos a activar el modelo en las opciones de la ventana de Solver (véase figura 3.16).

[entra figura]



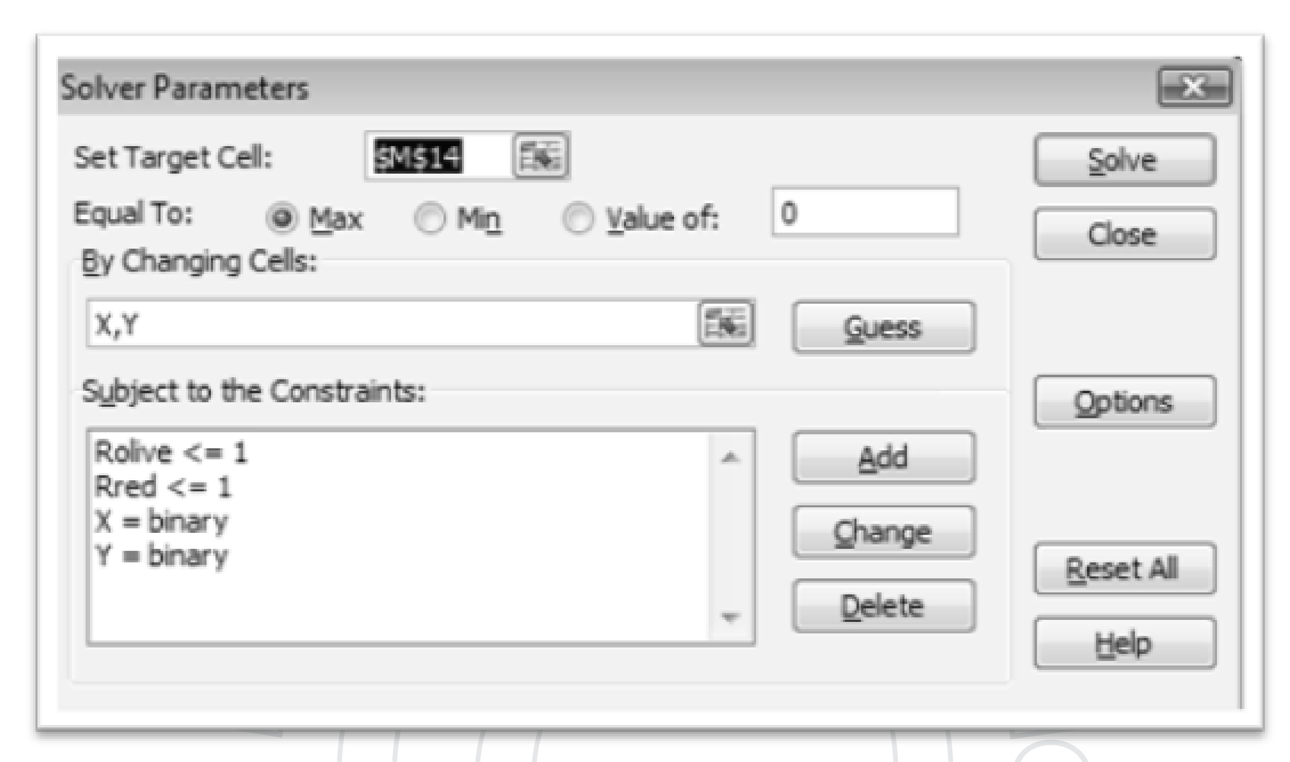
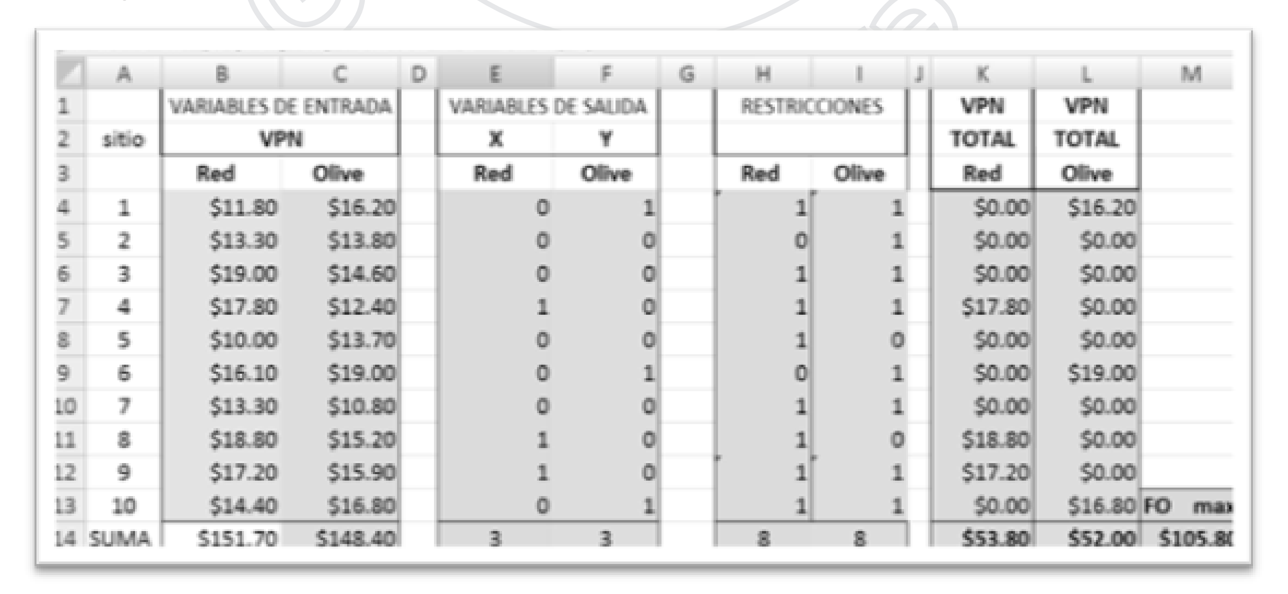


Figura 3.16

[fin de figura]

En la figura 3.17 se muestra la corrida del modelo aún sin considerar las restricciones en las cuales se condiciona la ubicación de las sucursales *X* en función de las sucursales *Y*.

[entra figura]



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		VARIABLES DE ENTRADA			VARIABLES DE SALIDA			RESTRICCIONES			VPN	VPN	
2	sitio	VPN			X	Y					TOTAL	TOTAL	
3		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive		Red	Olive	
4	1	$11.80	$16.20		0	1		1	1		$0.00	$16.20	
5	2	$13.30	$13.80		0	0		0	1		$0.00	$0.00	
6	3	$19.00	$14.60		0	0		1	1		$0.00	$0.00	
7	4	$17.80	$12.40		1	0		1	1		$17.80	$0.00	
8	5	$10.00	$13.70		0	0		1	0		$0.00	$0.00	
9	6	$16.10	$19.00		0	1		0	1		$0.00	$19.00	
10	7	$13.30	$10.80		0	0		1	1		$0.00	$0.00	
11	8	$18.80	$15.20		1	0		1	0		$18.80	$0.00	
12	9	$17.20	$15.90		1	0		1	1		$17.20	$0.00	
13	10	$14.40	$16.80		0	1		1	1		$0.00	$16.80	FO max
14	SUMA	$151.70	$148.40		3	3		8	8		$53.80	$52.00	$105.8

<<Injertos: Sitio Variables de entrada Red Olive VPN Variables de salida X Y Red Olive

Figura 3.17

[fin de figura]

La respuesta óptima de acuerdo con la corrida de Solver sugiere la construcción de tres sucursales de la marca *X* en las ubicaciones 4, 8 y 9. De manera similar ocurre para las sucursales *Y* en las cuales se proponen los sitios 1, 6 y 10. La estrategia anterior nos permite obtener un flujo máximo de ingresos (VPN) de $53.80 y $52.00 para las sucursales *X* y *Y*, respectivamente. Por tanto se tiene un ingreso total de $105.80.

Finalmente para agregar las restricciones relacionadas con la condición en la que se especifica que una sucursal de la marca *X* puede ser construida si y solo si una sucursal *Y* se encuentra a menos de 15 km de distancia. Tomando en cuenta la definición de rangos de celdas que ya se ha hecho en Excel, lo que se tendría que agregar en la ventana de Solver sería la formulación del tipo (Olive ≤ Red). La formulación especificada del modo anterior cubre las posibles ubicaciones geográficas definidas para el total de los 10 sitios. Dejamos a iniciativa del lector hacer el complemento del modelo para observar las diferencias en los resultados que serían obtenidos al aplicar dichas restricciones adicionales sobre el problema.

[TERMINA PROBLEMA]



CASO DE ESTUDIO:
TBB COMPAÑÍA DE TRANSPORTE INTERMODAL

TBB es una empresa de transporte intermodal localizada en el Estado de México, México. Esta empresa provee el servicio de contenedores entre diferentes ciudades. Estos contenedores son utilizados por los clientes para el transporte de kits de ensambles para la industria automotriz.

TBB suministra contenedores vacíos en los cuales los clientes pueden cargar sus ensambles y una vez que los contenedores llegan a su destino, los kits son descargados y los contenedores son transportados a otro punto para recolectar ensambles de un nuevo cliente. De tal manera, TBB necesita recolocar los contenedores vacíos periódicamente (en práctica, cada semana).

La última semana, muchos contenedores ISO 20 tienen que ser reubicados entre las terminales ubicadas en la Ciudad de México, Tampico, Lázaro Cárdenas, Guadalajara, Durango, Monterrey y San Luis Potosí, como se muestra en la Figura 1. Los costos (en USD) en esta red corresponden a la red actual que utiliza camiones para transportar los contenedores.

Los costos de envió se han incrementado en los últimos meses, y los ingenieros en logística han buscado otras alternativas para el envío de los contenedores, una de estas opciones es utilizar algunas rutas ferroviarias con los costos como se muestran en la Figura 2.

De las siguientes opciones, cuál le sugeriría a TBB? si usted fuera el líder del equipo de logística:

Opción 1: Seguir enviado los contenedores exclusivamente por carretera (Fig. 1).
Opción 2: Cambiar de envíos por carretera a envíos por tren (Fig. 2)
Opción 3: Diseñar una red intermodal en la que se permita el envío tanto por carretera como por tren.

a) Para cada opción determine el modelo de programación lineal

b) Para la opción 1 y 2 resuelva el problema utilizando el método de transporte. Determine la solución inicial por el método de los multiplicadores y resuelva el modelo de programación lineal utilizando el Software LINDO

c) Para la opción 3 resuelva el modelo de programación lineal con LINDO





Fig. 1: Red de transporte carretero utilizada actualmente por TBB



Fig. 2: Red de transporte ferroviarios que podría utilizar TBB



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 9

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3260.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X12	40.000000	0.000000
X13	0.000000	20.000000
X14	0.000000	40.000000
X21	0.000000	30.000000
X25	0.000000	16.000000
X26	50.000000	0.000000
X31	10.000000	0.000000
X35	0.000000	8.000000
X37	0.000000	40.000000
X41	50.000000	0.000000
X47	0.000000	40.000000
X52	20.000000	0.000000
X53	0.000000	42.000000
X56	0.000000	12.000000
X62	0.000000	40.000000
X65	0.000000	68.000000
X73	20.000000	0.000000
X74	0.000000	20.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	20.000000
3)	0.000000	35.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	27.000000
7)	0.000000	55.000000
8)	0.000000	-10.000000

NO. ITERATIONS= 9

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 24
OBJECTIVE VALUE = 3260.00000

SET Y1 TO <= 0 AT 1, BND= -3260. TWIN= -3260. 28
SET Y11 TO <= 0 AT 2, BND= -3460. TWIN= -3260. 40




```
NEW INTEGER SOLUTION OF    3460.00000    AT BRANCH      2 PIVOT      40
BOUND ON OPTIMUM:  3260.000
FLIP      Y11 TO >=         1 AT    2 WITH BND=    -3260.0000
SET       Y6 TO <=      0 AT    3, BND=  -3260.    TWIN=-0.1000E+31     49

NEW INTEGER SOLUTION OF    3260.00000    AT BRANCH      3 PIVOT      49

BOUND ON OPTIMUM:  3260.000
DELETE       Y6 AT LEVEL     3
DELETE      Y11 AT LEVEL     2
DELETE       Y1 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     3 PIVOTS=      49

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      3260.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      Y1        0.000000        373.000000
      Y2        1.000000        295.000000
      Y3        1.000000        110.000000
      Y4        0.000000          0.000000
      Y5        0.000000       -520.000000
      Y6        0.000000       2743.000000
      Y7        1.000000        165.000000
      Y8        1.000000        -27.000000
      Y9        0.000000         95.000000
     Y10        0.000000        110.000000
     Y11        1.000000       1000.000000
     Y12        1.000000       -120.000000
     Y13        1.000000       1743.000000
     Y14        0.000000        -35.000000
    XC12       10.000000          0.000000
    XC13        0.000000         20.000000
    XC14        0.000000         40.000000
    XC21        0.000000         30.000000
    XC25        0.000000         16.000000
    XC26        0.000000          0.000000
    XC31       10.000000          0.000000
    XC35        0.000000          8.000000
```



XC37	0.000000	40.000000
XC41	0.000000	0.000000
XC47	0.000000	40.000000
XC52	0.000000	0.000000
XC53	0.000000	42.000000
XC56	0.000000	12.000000
XC62	0.000000	40.000000
XC65	0.000000	68.000000
XC73	20.000000	0.000000
XC74	0.000000	20.000000
XT12	30.000000	0.000000
XT13	0.000000	0.000000
XT14	0.000000	40.000000
XT21	0.000000	30.000000
XT25	0.000000	16.000000
XT26	50.000000	0.000000
XT31	0.000000	20.000000
XT35	0.000000	28.000000
XT37	0.000000	30.000000
XT41	50.000000	0.000000
XT47	0.000000	10.000000
XT52	20.000000	0.000000
XT53	0.000000	22.000000
XT56	0.000000	12.000000
XT62	0.000000	40.000000
XT65	0.000000	68.000000
XT73	0.000000	10.000000
XT74	0.000000	50.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	20.000000
3)	0.000000	35.000000
4)	0.000000	10.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	27.000000
7)	0.000000	55.000000
8)	0.000000	-10.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	15.000000
11)	0.000000	10.000000
12)	0.000000	-20.000000




```
       13)      0.000000        7.000000
       14)      0.000000       35.000000
       15)      0.000000        0.000000
       16)      0.000000      -27.000000
       17)      0.000000      -55.000000
       18)      0.000000       10.000000
       19)      0.000000        0.000000
       20)      0.000000       20.000000
       21)      0.000000       -7.000000
       22)      0.000000      -35.000000

NO. ITERATIONS=      50
BRANCHES=    3 DETERM.=  1.000E    0

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      21
OBJECTIVE VALUE =   2160.00000

FIX ALL VARS.(    2)  WITH RC >    500.000
SET     YT11 TO <=      1 AT    1, BND=  -2160.    TWIN=-0.1000E+31     33
SET      YC6 TO <=      0 AT    2, BND=  -2160.    TWIN=-0.1000E+31     42
SET      YC5 TO <=      0 AT    3, BND=  -2160.    TWIN= -2380.        51
DELETE     YT13 AT LEVEL     4
FLIP     YC5 TO >=         1 AT     3 WITH BND=   -2380.0000
DELETE     YT13 AT LEVEL     4
DELETE      YC5 AT LEVEL     3
DELETE      YC6 AT LEVEL     2

DELETE     YT11 AT LEVEL     1
RELEASE FIXED VARIABLES
SET      YC7 TO <=      0 AT    1, BND=  -3260.    TWIN= -3260.        62

NEW INTEGER SOLUTION OF    3260.00000    AT BRANCH      6 PIVOT      62
BOUND ON OPTIMUM:  2660.000
DELETE      YC7 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     6 PIVOTS=      62

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```



OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3260.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
YC1	0.000000	20.000000
YC2	0.000000	73.000000
YC3	0.000000	0.000000
YC4	0.000000	750.000000
YC5	0.000000	30.000000
YC6	0.000000	1400.000000
YC7	0.000000	0.000000
YT8	1.000000	20.000000
YT9	1.000000	143.000000
YT10	1.000000	-100.000000
YT11	1.000000	1000.000000
YT12	1.000000	-110.000000
YT13	1.000000	1750.000000
YT14	1.000000	600.000000
XC12	0.000000	7.000000
XC13	0.000000	10.000000
XC14	0.000000	35.000000
XC21	0.000000	23.000000
XC25	0.000000	16.000000
XC26	0.000000	0.000000
XC31	0.000000	10.000000
XC35	0.000000	25.000000
XC37	0.000000	20.000000
XC41	0.000000	5.000000
XC47	0.000000	15.000000
XC52	0.000000	0.000000
XC53	0.000000	25.000000
XC56	0.000000	12.000000
XC62	0.000000	40.000000
XC65	0.000000	68.000000
XC73	0.000000	20.000000
XC74	0.000000	45.000000
XT12	40.000000	0.000000
XT13	0.000000	20.000000
XT14	0.000000	40.000000
XT21	0.000000	30.000000
XT25	0.000000	16.000000



XT26	50.000000	0.000000
XT31	10.000000	0.000000
XT35	0.000000	8.000000
XT37	0.000000	40.000000
XT41	50.000000	0.000000
XT47	0.000000	40.000000
XT52	20.000000	0.000000
XT53	0.000000	42.000000
XT56	0.000000	12.000000
XT62	0.000000	40.000000
XT65	0.000000	68.000000
XT73	20.000000	0.000000
XT74	0.000000	20.000000
YC13	1.000000	0.000000
YC14	1.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	8.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000000	-15.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	28.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	15.000000
11)	0.000000	-10.000000
12)	0.000000	-20.000000
13)	0.000000	7.000000
14)	0.000000	35.000000
15)	0.000000	-30.000000
16)	0.000000	20.000000
17)	0.000000	-7.000000
18)	0.000000	0.000000
19)	0.000000	0.000000
20)	0.000000	30.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 62
BRANCHES= 6 DETERM.= 1.000E 0

Descripción del método gráfico [T1]

Para aplicar este método de solución, se realiza el procedimiento que se resume a continuación en los pasos siguientes.

[INICIA ALERTA]

Alerta

Es importante considerar todas las restricciones y las variables de no negatividad. Además, el MPLC debe contener un número finito de desigualdades o rectas.

[TERMINA ALERTA]

[T2]Paso 1: Modelar el problema

En la modelación del problema se trata de construir el MPLC dado el enunciado de un problema de programación lineal, de tal forma que el resultado de este tenga como producto la función lineal a optimizar y su conjunto de restricciones también lineales.

[T2]Paso 2: Definir conjunto intersección

El objetivo de este paso es dibujar en el plano cada una de las restricciones (incluyendo las variables de no negatividad), con la finalidad de definir el conjunto intersección que se forma, o bien, para indicar que dicho conjunto es el vacío.

[T2]Paso 3: Asignar un valor numérico arbitrario a la función a optimizar (*Z*)

En este paso se debe asignar un “valor numérico arbitrario” de *Z*.

[T2]Paso 4: Dibujar la función a optimizar

Con base en el paso anterior, aquí se encuentran las trazas (intersección con el eje horizontal y la intersección con el eje vertical). Una vez que se tienen dichas trazas, se dibuja el segmento de recta que las une; de preferencia, usando una línea discontinua, con la finalidad de no confundirla con las rectas de las restricciones lineales.

[T2]Paso 5: Generar un conjunto de familias de rectas a la función a optimizar

Las familias de las rectas a la función a optimizar se generan asignando diversos valores a *Z*; luego, para cada valor de *Z*, se dibuja en el plano la recta de dicha función.



[T2]Paso6: Identificar geométricamente el vértice (punto de intersección) del conjunto intersección

Con base en el paso anterior, geométricamente se detecta cuál podría ser el vértice o punto factible que proporciona el mejor valor *Z*, ya sea para maximizar o minimizar.

[T2]Paso 7: Proporcionar la solución óptima y valor óptimo de *Z*

En este paso se determinan las coordenadas del vértice o punto factible que proporciona el mejor valor para *Z*; a este vértice se le denomina **solución óptima** y sele denota como *X**. Luego, con base en las coordenadas encontradas, se sustituye en la función a optimizar, para determinar el valor óptimo de *Z*, el cual se denota como *Z**.



Problema de aplicación de programación lineal

Una empresa fabrica dos tipos de productos: sillas y mesas. La empresa tiene dos departamentos el de carpintería y el de tapicería. Para fabricar una silla, se requiere de 3 horas de carpintería y 1 hora de tapicería. Para fabricar una silla se requiere 1 hora de carpintería y 2 horas de tapicería. Todo el personal de tapicería trabaja un total de 90 horas, y el de carpintería 80 horas. La empresa obtiene ganancias por la venta de cada unidad de producto según como se indica: 40 unidades monetarias (u.m.) por silla y 60 u.m. por mesa. ¿Cómo debe ser la producción de silla y mesas para que la empresa maximice sus ganancias? Realice la modelación del problema y posteriormente aplique el método gráfico y corrobore su resultado aplicando el método simplex.

Modelación de problema.

Paso 1: *Resumen de parámetros del problema*
Para llevar a cabo la modelación del problema, es conveniente presentar los datos (parámetros) indicados en el problema en una tabla como la mostrada a continuación:

Producto	Tiempo carpintería (horas/unidad producto)	Tiempo tapicería (horas/unidad producto)	Ganancia por unidad de producto ($/unidad de producto)
Silla	3	1	40
Mesa	1	2	60
Disponibilidad de recursos (horas)	90	80	

Paso 2: *Definición de objetivo*
Maximizar las ganancias de la empresa considerando la disponibilidad de tiempo en cada uno de los dos departamentos.

Paso 3: *Identificar las variables de decisión*
x_1 : Cantidad de sillas a fabricar
x_2 : Cantidad de mesas a fabricar

Paso 4: *Definir la función objetivo:*
$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$
Un análisis de unidades para el primer término de la función objetivo sería:
$50\ (\$/silla)\ \ ,\ x_1(sillas)$

De este modo, $40x_1\ (\$/silla)(silla) \equiv 40x_1(\$)$

Por tanto de manera análoga para el segundo término.

Paso 5: *Establecer todas las restricciones*
Tiempo de carpintería: $3x_1 + 1x_2 \leq 90$
Tiempo de tapicería: $1x_1 + 2x_2 \leq 80$



Paso 6: *Definir variables de no negatividad*

$x_1, x_2 \geq 0$

Por tanto, el modelo de programación lineal continua (MPLC) que representa a este problema es:
$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$
s.a

$3x_1 + 1x_2 \leq 90$

$1x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

MÉTODO GRÁFICO

A continuación se aplica el método gráfico para hallar la solución óptima del MPLC y que a su vez nos proporcionará la solución del problema.

Paso 1: *Dibujar el polígono*
Se hará uso de Geogebra 4.2 para dibujar el área (polígono) que se forma. Dicha área se muestra en la figura 1.

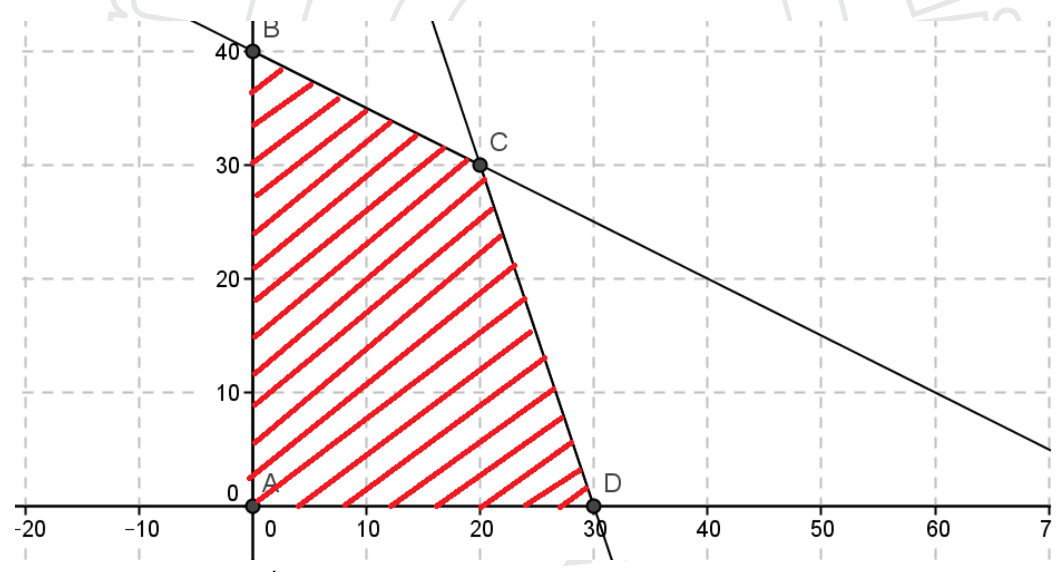


Figura 1. Área o polígono formada por las cuatro restricciones del MPLC.

Para buscar el punto factible (vértice) que proporcionará el valor óptimo de la función objetivo, se traza una familia de rectas paralelas a la de la función objetivo, según como se observa en la figura 2.

Paso 2: *Generar y dibujar familias de rectas paralelas a la función a optimizar*
Nuevamente con base en el polígono de figura 1 (sin considerar el área achurada) se proponen valores para Z = 0, Z = 1200, Z = 2400 y Z = 2600; que precisamente son los valores cuando se interceptan con los vértices del polígono, según como se presente en la figura 2.



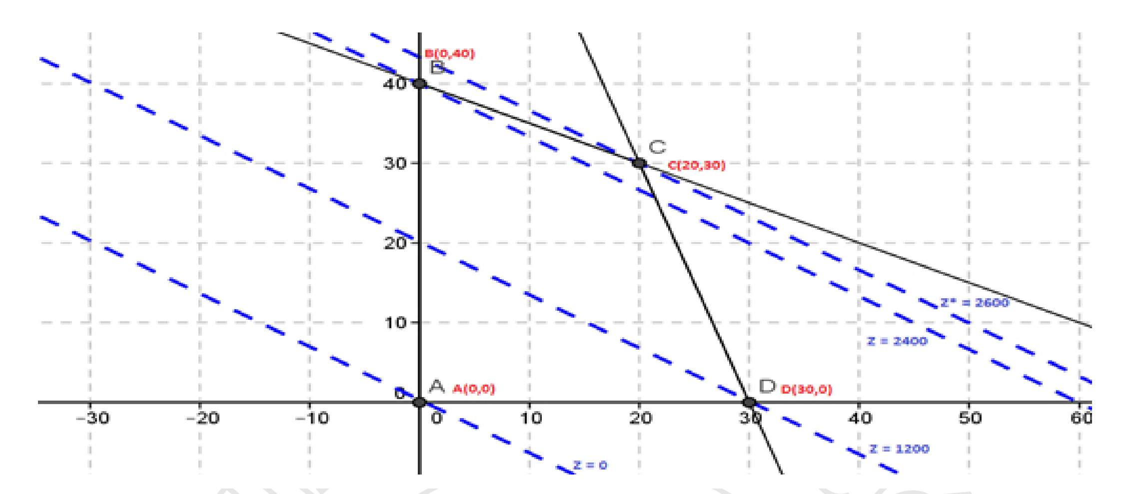


Figura 2. Presentación del punto óptimo y valor óptimo de la función objetivo.

Paso 3: *Establecer el punto factible óptimo y el valor óptimo de la función objetivo*
El punto factible óptimo (solución óptima) se encuentra en:

$x_1^* = 20$, $x_2^* = 30$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $z^* = 2600$

Paso 4: *Interpretación de lo obtenido en paso 3*
Fabricar 20 sillas y 30 mesas para obtener la máxima ganancia de $ 2600.

MÉTODO SIMPLEX

El MPLC a resolver por el método simplex es:

$Max\ z = 40x_1 + 60x_2$

s.a

$3x_1 + 1x_2 \leq 90$

$1x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

Paso 1: *Estandarizar el modelo*

$Max\ z = 40x_1 + 60x_2 + 0x_3 + 0x_4$

s.a

$3x_1 + 1x_2 + x_3 \quad = 90$

$1x_1 + 2x_2 + \quad x_4 = 80$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Paso 2: *Buscar una solución inicial básica factible (SIBF)*
El número total de variables son n = 4
El número total de restricciones son m = 2



Por tanto una SIBF se obtiene haciendo (n-m) variables iguales a 0.
Si se hacen las variables $x_1 = x_2 = 0$, entonces una SIBF sería:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 90, 80)$

Paso 3: *Realizar el tableau simplex inicial*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
3	**1**	1	0	90	X3	90/1 = 90
1	**2**	0	1	80	X4	80/2 = 40
40	**60**	0	0	Z		

Paso 4: *Generar primera iteración (nuevo tableau)*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
5/2	**0**	1	-1/2	50	X3	50/(5/2) = 20
1/2	**1**	0	½	40	X2	40/(1/2) = 80
10	**0**	0	-30	Z – 2400		

Paso 5: *Generar segunda iteración (otro tableau)*

X1	X2	X3	X4	LD	VB	Theta
5/2	**0**	1	-1/2	50	X3	50/(5/2) = 20
1/2	**1**	0	½	40	X2	40/(1/2) = 80
10	**0**	0	-30	Z – 2400		

Paso 6: *Verificar que se cumpla criterio de optimalidad*
Como los Cj – Zj de las variables no básicas son valores negativos, entonces se cumple el criterio de optimalidad.

Paso 7: *Establecer el punto factible óptimo y el valor óptimo de la función objetivo*
Se llega al mismo resultado obtenido en el método gráfico, que es:

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es: $z^* = 2600$



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez Lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

USO DE SOFTWARE WinQSB

Con ***Método gráfico,*** se presenta la ventana al introducir el modelo

Linear and Integer Programming

LP Sample Problem

LowerBound : X1 | 0

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	40	60		
C1	3	1	<=	90
C2	1	2	<=	80
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		



Ventana al dar click en la pestaña de: Solve and Analize, Graphic Method y OK:

Linear and Integer Programming
File Sensitivity Options Window Help
Graphic Solution for LP Sample Problem
X2 Constraint: Objective Function: Feasible Area:
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=2,600.00
X1=20.00
X2=30.00
C1
C2
90.00 81.00 72.00 63.00 54.00 45.00 36.00 27.00 18.00 9.00 0.00
0.00 16.00 32.00 48.00 64.00 80.00
X1
Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:27 p.m.

Conclusión: Es el mismo resultado obtenido en el método gráfico, en cuanto a:

- Polígono
- Solución factible óptima y
- Valor óptimo de función objetivo.



Con ***Método simplex,*** se presenta la ventana al introducir el modelo

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LP Sample Problem

LowerBound : X1 | 0

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	40	60		
C1	3	1	<=	90
C2	1	2	<=	80
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

LP ILP

Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:25 p.m.



Ventana al dar click en la pestaña de: Solve and Analize y Solve and Display Steps:

Linear and Integer Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 1

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	3.0000	1.0000	1.0000	0	90.0000	90.0000
Slack_C2	0	1.0000	2.0000	0	1.0000	80.0000	40.0000
	C(j)-Z(j)	40.0000	60.0000	0	0	0	

Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:33 p.m.



Ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:

Linear and Integer Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 2

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	2.5000	0	1.0000	-0.5000	50.0000	20.0000
X2	60.0000	0.5000	1.0000	0	0.5000	40.0000	80.0000
	C(j)-Z(j)	10.0000	0	0	-30.0000	2,400.0000	

Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:35 p.m.



Otra ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:

Linear and Integer Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 3

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	40.0000	1.0000	0.0000	0.4000	-0.2000	20.0000	
X2	60.0000	0.0000	1.0000	-0.2000	0.6000	30.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4.0000	-28.0000	2,600.0000	

Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:36 p.m.



Nuevamente otra ventana al dar click en Simplex Iteration y Next Iteration:

Linear and Integer Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 3

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	40.0000	60.0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	40.0000	1.0000	0.0000	0.4000	-0.2000	20.0000	
X2	60.0000	0.0000	1.0000	-0.2000	0.6000	30.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4.0000	-28.0000	2,600.0000	

Linear and Integer Programming

The simplex method is complete.

Aceptar

Inicio | Yahoo México - Aur... | Para Ing Delfin | Pb aplicación de PL ... | Graphics Server | Linear and Integer ... | ES | 08:37 p.m.

Conclusión: Es el mismo resultado obtenido en el método simplex, en cuanto:

- Tableau simplex inicial,
- Tableau de primera iteración,
- Tableau de segunda iteración,
- Misma solución óptima y
- Mismo valor óptimo de función objetivo.



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

Problemas resueltos adicionales

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto

Resolver con software Lindo y comparar el resultado con el resuelto en el libro:

$MaxZ = 8X_1 + 5X_2$

Sujeto a:

1. $X_1 + X_2 \leq 6$
2. $9X_1 + 5X_2 \leq 45$

$X_1, X_2 \geq 0$
$X_1, X_2 \in \square^{+}$

Solución

Primero, se copia el problema en el tablero, luego de la instrucción New, después se resuelve con Solve:


```
MAX 8 X1 + 5 X2
SUBJECT TO
     X1 +   X2 <=  6
   9 X1 + 5 X2 <= 45
END
INTE X1, X2
```




```
LINDO - [Reports Window]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

                        OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        5.000000        INFINITY         INFINITY
      X2        0.000000        INFINITY         INFINITY

Function objetive       40.000000

                        RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  RHS           INCREASE         DECREASE
       2        6.000000        INFINITY         INFINITY
       3       45.000000        INFINITY         INFINITY
```

Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 5$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 40$

Se deben producir 5 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 5$); se deben fabricar 0 unidades del artículo 2 (no se deben producir unidades del artículo 2) ($X_2^* = 0$); la utilidad máxima es de 40 u. m. ($Z^* = 40$). Estamos comprobando que los resultados son los mismos.

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto



$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Con las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
1.\quad X_1 + X_2 &\leq 6 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \\
X_1, X_2 &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

Solución

Aplicando el programa Lindo, se tiene:

File Edit Solve Reports Window Help

```
MAX 3 X1 + 2 X2
SUBJECT TO
X1 + X2 <= 6
END
GINTE X1, X2
```




```
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      18.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         6.000000          0.000000
       X2         0.000000          1.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          3.000000

NO. ITERATIONS=       1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        3.000000        INFINITY         1.000000
      X2        2.000000        1.000000         INFINITY

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2        6.000000        INFINITY         6.000000
```

Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 6$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 18$.

Se deben producir 6 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 6$); se deben fabricar 0 unidades del artículo 2 (no se deben producir unidades del artículo 2) ($X_2^* = 0$); la utilidad máxima es de 18 u. m. ($Z^* = 18$).

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]

[INICIA PROBLEMA RESUELTO]

Problema resuelto



$$\text{Max } Z = 7X_1 + 8X_2$$

Con sus restricciones:

$$\begin{aligned}
1.\quad & 10X_1 + 3X_2 \leq 52 \\
2.\quad & 2X_1 + 3X_2 \leq 18 \\
& X_1, X_2 \geq 0 \\
& X_1, X_2 \in \square^{+}
\end{aligned}$$

Solución

Estandarización:

$$\begin{aligned}
1.\quad & 10X_1 + 3X_2 + S_1 = 52 \\
2.\quad & 2X_1 + 3X_2 + S_2 = 18 \\
0.\quad & Z - 7X_1 - 8X_2 = 0
\end{aligned}$$

Tabla 1. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	B	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	52	10	3	1	0
0	S_2	18	2	3	0	1
	Z	0	– 7	– 8	0	0

Variable que entra a la base: X_2
Variable que sale de la base: S_2

Tabla 2. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	B	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	34	8	0	1	– 1
8	X_2	6	2/3	1	0	1/3
	Z	48	– 2/3	0	0	8/3

Variable que entra a la base: X_1
Variable que sale de la base: S_1

Tabla 3. Simplex

		Cj	7	8	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
7	X_1	17/4	1	0	1/8	– 1/8
8	X_2	19/6	0	1	– 1/12	5/12
	Z	661/12	0	0	5/24	59/24

Solución óptima única para el problema primal:

$X_1^* = 17/4$; $X_2^* = 19/6$; $S_1^* = 0$; $S_2^* = 0$; $Z^* = 661/12$, pero para el problema de Programación Lineal Entera no corresponde la respuesta por no tener valores enteros. Para solucionar este problema aplicamos el algoritmo fraccional de Gomory:

$1\ X_1 + 1/8\ S_1 - 1/8\ S_2 = 17/4$
$(1 + 0)\ X_1 + (0 + 1/8)\ S_1 + (-1 + 7/8)\ S_2 = (4 + 1/4)$
$1/8\ S_1 + 7/8\ S_2 = 1/4$ Nueva ecuación
$1/8\ S_1 + 7/8\ S_2 \geq 1/4$ Nueva restricción
$-1/8\ S_1 - 7/8\ S_2 + S_3 = -1/4$ Ecuación a introducir al sistema

Aplicamos el dual–simplex, para quitarle la infactibilidad al sistema.



Tabla 4. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
7	X_1	17/4	1	0	1/8	– 1/8	0
8	X_2	19/6	0	1	– 1/12	5/12	0
0	S_3	– 1/4	0	0	– 1/8	– 7/8 – 7/8	1

Variable que sale de la base: S_3
Variable que entra a la base: S_1

Tabla 5. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
7	X_1	4	1	0	0	– 1	1
8	X_2	10/3	0	1	0	1	– 2/3
0	S_1	2	0	0	1	7	– 8
	Z	656/12	0	0	0	1	5/3

Aplicamos el algoritmo fraccional de Gomory:

$1\ X_2 + 1\ S_2 – 2/3\ S_3 = 10/3$
$(1 + 0)\ X_2 + (1 + 0)\ S_2 + (– 1 + 1/3)\ S_3 = (3 + 1/3)$
$1/3\ S_3 = 1/3$
$1/3\ S_3 = 1/3$ Nueva ecuación
$1/3\ S_3 \geq /3$ Nueva restricción
$– 1/3\ S_3 + S_4 = – 1/3$ Ecuación a introducir al sistema

Tabla 6. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4
7	X_1	4	1	0	0	– 1	1	0
8	X_2	10/3	0	1	0	1	– 2/3	0
0	S_1	2	0	0	1	7	– 8	0
0	S_4	– 1/3	0	0	0	0	– 1/3	1
	Z	656/12	0	0	0	1	5/3	0



Variable que sale de la base: S_4
Variable que entra a la base: S_3

Tabla 7. Dual–Simplex

		Cj	7	8	0	0	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4
7	X_1	3	1	0	0	– 1	0	3
8	X_2	4	0	1	0	1	0	– 2
0	S_1	10	0	0	1	7	0	– 24
0	S_3	1	0	0	0	0	1	– 3
	Z	53	0	0	0	1	0	5

Solución optima única al problema de programación lineal entera:

$X_1^* = 3$; $X_2^* = 4$; $S_1^* = 10$; $S_2^* = 0$; $S_3^* = 1$; $S_4^* = 0$; $Z^* = 53$.

Se deben producir 3 unidades del artículo 1 ($X_1^* = 3$); se deben fabricar 4 unidades del artículo 2 ($X_2^* = 4$); sobraron 10 unidades de los recursos de la sección 1 ($S_1^* = 10$); se emplearon todos los recursos de la sección 2 ($S_2^* = 0$); sobró una unidad de los recursos de la sección 3 ($S_3^* = 1$); se utilizaron todos los recursos de la sección 4 ($S_4^* = 0$); la utilidad máxima es de 53 u. m. ($Z^* = 53$).

[TERMINA PROBLEMA RESUELTO]



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

PROGRAMACION LINEAL ENTERA
ALGORITMO FRACCIONAL DE GOMORY

EJEMPLO 1:

MAX $Z = 8\,X_1 + 5\,X_2$

Con sus restricciones:

1. $X_1 + X_2 \leq 6$
2. $9\,X_1 + 5\,X_2 \leq 45$

$X_1, X_2 \geq 0$

$X_1, X_2 \in \square^{+}$

Solución:

Estandarización:

Agregamos las variables de holgura S_1 y S_2:

1. $X_1 + X_2 + S_1 = 6$
2. $9\,X_1 + 5\,X_2 + S_2 = 45$

0. $Z - 8\,X_1 - 5\,X_2 = 0$

Aplicamos el algoritmo simplex:

		Cj	8	5	0	0
CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	6	1	1	1	0
0	S_2	45	9	5	0	1
	Z	0	– 8	– 5	0	0

Variable de entrada a la base la que más se aleja de cero por la izquierda en la última fila, es decir, se escoge entre (- 8, - 5, 0, 0)

Variable de salida de la base el cociente más cercano a cero por la derecha que resulta de dividir cada uno de los recursos éntrela columna que acaba de netar a la base, (6/1, 45/9)



Variable que entra a la base: X_1 Variable que sale de la base: S_2

TABLERO 2:

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2
0	S_1	1	0	4/9	1	– 1/9
8	X_1	5	1	5/9	0	1/9
	Z	40	0	– 5/9	0	8/9

Variable que entra a la base: X_2 Variable que sale de la base: S_1

TABLERO 3:

CB	VB	b	X1	X2	S1	S2
5	X2	9/4	0	1	9/4	– 1/4
8	X1	15/4	1	0	– 5/4	1/4
	Z	165/4	0	0	5/4	3/4

Solución Óptima Única para el problema primal:

$X_1^* = 15/4$; $X_2^* = 9/4$; $S_1^* = 0$; $S_2^* = 0$; $Z^* = 165/4$, pero para el problema de Programación Lineal Entera no nos sirve la respuesta, ya que las variables de decisión tienen valores fraccionarios. Para resolver este problema, aplicamos un refinamiento de la Programación Lineal, el cual corresponde al algoritmo fraccional de Gomory (es de aclarar que existen otros dos el entero y el mixto):

Existen otros, como son el algoritmo entero y el algoritmo mixto.

Paso 1. Resolver el problema primal, si la solución es entera, corresponde a la óptima para el problema de Programación Lineal Entera.

Paso 2. Seleccionar decimales y escoger aquel que tenga la mayor parte fraccionaria tomando las ecuaciones completas.

Paso 3. Se separan la parte entera, es decir, quedarse solamente con la parte fraccionaria.

Nota: Luego de encontrar una solución óptima para el primal, por Simplex y después de agregarle la primera nueva ecuación al sistema se pasa a Dual – Simplex, para quitarle la infactibilidad al sistema.



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

A partir de los siguientes ejemplos, vamos a mostrar la manera de aplicar el algoritmo fraccional de Gomory para solucionar un problema de Programación Lineal Entera:

$1\ X_1 - 5/4\ S_1 + 1/4\ S_2 = 15/4$
$(1 + 0)\ X_1 + (-2 + 3/4)\ S_1 + (0 + 1/4)\ S_2 = (3 + 3/4)$
$3/4\ S_1 + 1/4\ S_2 = 3/4$ Nueva ecuación
$3/4\ S_1 + 1/4 S_2 \geq 3/4$ Nueva restricción
$-3/4\ S_1 - 1/4\ S_2 + S_3 = -3/4$ Ecuación a introducir al sistema

A continuación se aplica el dual – simplex, con el objetivo de quitarle la infactibilidad al sistema.

TABLERO 4: DUAL – SIMPLEX

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
5	X_2	9/4	0	1	9/4	– 1/4	0
8	X_1	15/4	1	0	– 5/4	1/4	0
0	S_3	– 3/4	0	0	– 3/4	– 1/4	1
	Z	165/4	0	0	5/4	3/4	0

Variable que se vuelve no básica: S_3 Variable que se vuelve básica: S_2

TABLERO 5: DUAL – SIMPLEX

CB	VB	b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
5	X_2	0	0	1	0	– 1	3
8	X_1	5	1	0	0	2/3	– 5/3
0	S_1	1	0	0	1	1/3	– 4/3
	Z	40	0	0	0	1/3	5/3

Solución Optima Unica al problema de Programación Lineal Entera:

$X_1^* = 5;\ X_2^* = 0;\ S_1^* = 1;\ S_2^* = 0;\ S_3^* = 0;\ Z^* = 40.$

EJEMPLO 2:

Vamos a resolver el anterior problema con el software WINQSB:



Eva S. Hernández Gress / Gullermo Jiménez lozano / Jesús F. López Pérez / Iris A. Matínez Salazar Luis A. Moncayo Martínez / Marco A. Montufar Benítez / GastónVertiz Camarón

La primera ventana que nos encontramos al abrir el programa es la siguiente, en la cual aprovechamos para darle un nombre al problema (Problem Title), número de variables (Number of Variables) , número de restricciones (Number of Constraints), criterio de la función objetivo (maximization o minimization), en este caso (Nonnegative Integer), formato para entrada de datos (Spreadsheet Matrix Form) y OK para introducir los datos.

Para trabajar con un problema nuevo, se puede hacer desde File, New Problem o desde el botón que se encuentra situado en el botón situado en el extremo superior izquierdo.

A continuación se introducen los datos del problema a solucionar:



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

C2 : R.H.S. 45

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	8	5		
C1	1	1	<=	6
C2	9	5	<=	45
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Integer	Integer		

LP ILP

Nos vamos para Solve and Analyze, para resolver el problema:



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for A

	07:47:57		Friday	November	15	2013
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	5.0000	8.0000	40.0000	-1.0000	at bound
2	X2	0	5.0000	0	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	40.0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	5.0000	<=	6.0000	1.0000	0
2	C2	45.0000	<=	45.0000	0	1.0000

ES 07:48 a.m. 15/11/2013

Solución Optima Unica al problema de Programación Lineal Entera:

$X_1^* = 5$; $X_2^* = 0$; $Z^* = 40$.



Soluciones Unidad 5

Algoritmos especiales: El problema del transporte

5.1 La asignación por el método de la esquina noroeste se muestra en la Tabla 5.7 y el costo inicial es de 65'500 + 500M. Después de cuatro iteraciones se llega a la solución óptima de $60'000 con el siguiente plan de asignación: de las plantas mandar toda su capacidad al almacén 1 y de este almacén surtir a las cuatro concesionarias.

5.2 Con el método MAV se llega en 1 iteración, con el del método noroeste en 3 y con el método del costo mínimo en 2.

5.3 a) Costo de $15'650

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			300	350	650
Nodo ficticio				200	200
Demanda	200	250	400	550	

b) solución óptima $14450

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			100	550	650
Nodo ficticio			200		200
Demanda	200	250	400	550	

5.4 La solución generada por MAV es la solución óptima. Si creamos la solución inicial con el método de la esquina noroeste tenemos que hacer una iteración más para llegar a la solución óptima.



5.5 Tenemos que multiplicar $0.1/ton*km por cada uno de las distancias de la tabla para que nos dé como resultado $/ton. La solución inicial por el método de la esquina noroestes nos da un costo de $8’765

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400	50		450
Plantación 2		400		400
Plantación 3		75	225	300
Demanda	400	525	225	

Después de dos iteraciones se llega al siguiente plan de distribución

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400		50	450
Plantación 2		225	175	400
Plantación 3		300		300
Demanda	400	525	225	

El costo de este plan de distribución es de $4’977.5. Los máximos beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 4977.5 = **$3’397.5**

5.6 El costo de distribución óptimo es $6’115. Los beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 6’115 = **$2’260**. No le conviene, las ganancias son menores que en el problema 5.5.

5.7 En este caso los orígenes y destinos son los periodos (P)rimavera, (V)erano, (O)toño e (I)nvierno. La oferta es la capacidad de producción en cada uno de los periodos y la demanda es el pronóstico hecho por el depto. de mercadotecnia. Existe un costo unitario de producción para cada periodo y un costo de almacenaje de $10. La tabla inicial es:

	P	V	O	I	Oferta
P	80	90	100	110	30’000
V	M	85	95	105	25’000
O	M	M	82	92	30’000
I	M	M	M	86	25’000
Demanda	25’000 – 10’000	40’000	30’000	15’000+10’000	



Por ejemplo, en primavera se van a producir 30’000 unidades si las consumimos en el mismo periodo nos cuentan $80, si consumimos $20’000 unidades en primavera y 10’000 en veranos, éstas nos constarán $80 más $10 pesos por almacenarlas un periodo. El costo de M significa que no podemos producir para periodos anteriores.

5.8 La solución inicial generada por MAV

	P	V	O	I	Oferta
P	15’000	15’000			30’000
V		25’000	0	0	25’000
O			30’000		30’000
I				25’000	25’000
Demanda	15’000	40’000	30’000	25’000	

La costo del plan de producción es $9’285’000, la solución óptima es la generada por MAV. Por lo tanto la utilidad es 120(15’000)+140(40’000)+125(30’000)+105(25000)-9’285’000= $4’490’000

5.9 *a)*Min 400xp1p2 + 400xp2p1 + 400xp1c + 900xp2c + 900xp1w1 + 100xcw2 + 200xw2w1 + 900w1w2

Subject to

xp1w1 + xp1c + + xp1p2 – xp2p1 = 50

xp2p1 + xp2c – xp1p2 = 40

xcw2 – xp1c – xp2c = 0

xw1w2 – xw2w1 – xp1w1 = -45

xw2w1 – xw1w2 – xcw2 = -45

end

*b)*Se deben de agregar una demanda de 10 en el almacén C -- restricción 3 en el problema en a). Sin embargo el problema no tiene solución ya que se debería incrementar la oferta en 10 unidades.

xcw2 – xp1c – xp2c = -10

end

c) al modelo en a) anexar la siguiente restricción **xp1c <= 20**



5.10 Construimos por MAV la solución inicial

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	0	400	400	900	M	50 + B
P2	400	0	900	M	M	40+B
C	M	M	0	M	100	B
W1	M	M	M	0	900	B
W2	M	M	M	200	0	B
Demanda	B	B	B	45	45	

Si B = 90, después de una iteración encontramos la solución óptima con un costo de $ 70’000 y el siguiente plan de distribución

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	50		90	0		140
P2	40	90				130
C					90	90
W1				90		90
W2				45	45	90
Demanda	90	90	90	135	135	

5.11 La solución es:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 80000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XP1P2	0.000000	700.000000
XP2P1	0.000000	100.000000
XP1C	20.000000	0.000000
XP2C	40.000000	0.000000



XP1W1	30.000000	0.000000
XCW2	60.000000	0.000000
XW2W1	15.000000	0.000000
W1W2	0.000000	900.000000
XW1W2	0.000000	200.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	300.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	900.000000
5)	0.000000	1200.000000
6)	0.000000	1000.000000
7)	0.000000	200.000000

Si restringimos el número de unidades por la ruta xp1c el costo se incremente en $10’000 ($80’000-$70’000)

5.13 Primero la demanda de plantas no es suficiente para satisfacer la demanda. Por lo tanto el plan de distribución tiene un costo de $2’490’000. La demanda de 3 no es atendida y solo se le llevaran 500 unidades a 4

	1	2	3	4	
A	1800	300		500	2600
B		1800			1800
Ficticio			**550**	**1250**	**1800**
Demanda	1800	2100	550	1750	

5.14 No porque el costo aumentaría a $3’960’000



5.15 Costo = $8'000, con el siguiente plan de distribución

	C	D	E	
A		100		100
B	100		100	200
Demanda	100	100	100	

5.16 El costo se mantiene igual ($5'000) mandando 100 unidades de A a E, 200 de B a C y 100 de C a E.

5.17 La oferta no es suficiente para los requerimientos de Vuelo-Mex. De tal manera que el costo mínimo de $8'525'000 se obtiene cuando se compran 110'000 litros a D para abastecer a B; 220'000 litros a E y se abastece A (165'000) y B (55'000); 330'000 litros a F y se abastece a C; y 385'000 a G para abastecer a A(110'000) y C(330'000). No se surten 385'000 litros a B.

5.19

a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	Deman-da
1	0	M	M	1.5	1.2	M	M	M	450+B
2	M	0	M	1.3	0.6	M	M	M	700+B
3	M	M	0	2	0.7	M	M	M	500+B
4	M	M	M	0	M	1	0.6	0.7	B
5	M	M	M	0.2	0	0.8	0.4	0.9	B
6	M	M	M	M	M	0	0.3	0.8	B
7	M	M	M	M	M	M	0	0.4	B
8	M	M	M	M	M	0.8	M	0	B
Oferta	B	B	B	B	B	550+B	500+B	600+B	

b) Min 1.5P1D4 + 1.2P1D5 + 1.3P2D4 + 0.6P2D5 + 2P3D4 + 0.7P3D5 +

D4C6 + 0.6D4C7 + 0.7D4C8 + 0.2D5D4 + 0.8D5C6 + 0.4D5C7 + 0.9D5C8 +

0.3C6C7 + 0.4C7C8 + 0.8C6C8 + 0.8C8C6



Subject to

P1D5 + P1D4 = 450

P2D4 + P2D5 = 700

P3D4 + P3D5 = 500

D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = 0

D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = 0

C6C7 + C6C8 - D4C6 - D5C6 = - 550

C7C8 - D4C8 - D5C8 = -500

C8C6 - D4C8 - D5C8 - C6C8 = - 600

End

c) $2430

d) D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = -100

D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = -100



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
X3 >= 2 X1

1.2
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 2$
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 < 5$
$x_3+x_5 = 2$
$x_1+x_4 \leq 2$

1.3
$x_1+x_4+x_5 -1 >= M(1 - y_1)$
$x_2+x_3 -1 >= M(1 - y_2)$
$y_1 + y_2 = 1$
y_1, y_2

1.4
Nodo artificial de oferta.
Nodo artificial de demanda.

1.5
a) Falso.
b) Verdadero.
c) Falso
d) Falso.
e) Verdadero

1.9
Variables
$xij = 1$ si el arco (i,j) pertenece a la ruta más corta, 0 en caso contrario.
Minimizar $z = 10x_{12} + 5x_{14} + 7x_{42} + 8x_{25} + 3x_{23} + 9x_{36} + 7x_{56} + 6x_{53} + 11x_{45}$

Sujeto a:
Las restricciones deben ser por nodo y representar la conservación de flujo del nodo:

Total de flujo entrando al nodo = total de flujo saliendo del nodo

Se pondrán tres a manera de ejemplo.
Nodo 1 (el nodo uno es el nodo de origen, por tanto recibe una unidad): $1= x_{12}+x_{14}$.
Nodo 5: $x_{25} + x_{45} = x_{53}+x_{56}$.
Nodo 6: $x_{36}+ x_{56} =1$

1.13
Si x_{ij} es la cantidad de productos a enviar del punto *i* al punto *j*, es necesario definir unas variables enteras y_{ij} que representen la cantidad de camiones (llenos o semi-llenos) que se envían del punto *i* al punto *j* y añadir la restricción ($y_{ij} >= x_{ij}$ / Q).

Problema reto
Una empresa produce jugos de manzana, naranja, zanahoria, betabel, naranja-zanahoria, revitalizante y energizante. La empresa no tiene problemas de demanda, todo lo que produce lo vende y ha determinado que de cada kilo de fruta/verdura se puede obtener un litro de jugo. En las tablas 1.20 y 1.21 se muestra la información sobre precios, costos, disponibilidad de producto y composición de los jugos. ¿Cuántos litros de cada jugo debe fabricar para obtener el máximo beneficio económico?

Tabla 1.20

Fruta/Verdura	Disponibilidad (kilos)	Costo (kilos)	Precio de venta (litro)
Manzana	20000	$25.00	$32.00
Naranja	45000	$9.00	$15.00
Zanahoria	32000	$9.95	$17.00
Betabel	19000	$17.50	$25.00

Tabla 1.21

Jugo	Especificación	Precio de venta
Naranja-zanahoria	50% naranja 50% zanahoria.	$16.00
Revitalizante	No menos de 20% de zanahoria No más de 60% de naranja No menos de 10% de manzana	$28.00
Energizante	25% betabel 30% naranja 40% zanahoria 5% manzana	$23.00

Solución

x_{11} : manzana para el jugo puro.
x_{13} : manzana para el jugo revitalizante.
x_{11} : manzana para el jugo energizante.
x_{21} : naranja para el jugo puro.
x_{22} : naranja para el jugo naranja-zanahoria.
x_{23} : naranja para el jugo revitalizante.
x_{24} : naranja para el jugo energizante.
x_{31} : zanahoria para el jugo puro.
x_{32} : zanahoria para el jugo naranja-zanahoria.
x_{33} : zanahoria para el jugo revitalizante.
x_{34} : zanahoria para el jugo energizante.
x_{41} : betabel para el jugo puro.
x_{43} : betabel para el jugo revitalizante.
x_{44} : betabel para el jugo energizante.

Función objetivo:

Maximizar $z = (32–25)\, x_{11} + (28–25)\, x_{13} + (23–25)\, x_{14} + (15–9)\, x_{21} + (16–9)\, x_{22} + (28–9)\, x_{23} + (23–9)\, x_{24} + (17–9.95)\, x_{31} + (16–9.95)\, x_{32} + (28–9.95)\, x_{33} + (23–9.95)\, x_{34} + (25–17.5)\, x_{41} + (23–17.5)\, x_{44}$.

Sujeto a:

$x_{11} + x_{13} + x_{14} \leq 20000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 45000$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 32000$
$x_{41} + x_{43} + x_{44} \leq 19000$
$x_{22} = 0.5(x_{32} + x_{22})$
$x_{32} = 0.5\ (x_{32} + x_{22}$
$x_{33} >= 0.2(x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{23} <= 0.6\ (x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{13} >= 0.1\ (x_{33} + x_{23} + x_{13})$
$x_{44} = 0.25\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{24} = 0.3\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{34} = 0.4\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{14} = 0.05\ (x_{44} + x_{24} + x_{34} + x_{14})$
$x_{11} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{14} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, x_{24} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0, x_{34} \geq 0, x_{41} \geq 0, x_{43} \geq 0, x_{44} \geq 0.$

Iris Martínez, Gastón Vértiz, Fabián López, Guillermo Jiménez, Luis Moncayo



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$y_1^* = 3.6, y_2^* = 1.4$; $w^* = 320$

2.2
$x_1^* = 20, x_2^* = 60$; $z^* = 180$

2.3
$x_1^* = 30, x_2 = 0$; $z^* = 150$

2.4
$y_1^* = 7.5, y_2^* = 5$; $w^* = 75$

2.5
$x_1^* = 30, x_2 = 0$; $z^* = 150$

2.6
$x_1^* = 20, x_2 = 0, x_3 = 0$; $z^* = 100$

2.7
$x_1 = 0, x_2^* = 10, x_3 = 0, x_4 = 0$; $z^* = 50$

2.8
$x_1 = 0, x_2^* = 2.4, x_3^* = 19.2, x_4 = 0$; $z^* = 69.6$

2.9
$y_1 = 0, y_2^* = 12$; $w^* = -60$

2.10
Modelo es no acotado

2.11
$x_1^* = 40, x_2 = 0, x_3 = 0$; $z^* = 40$

2.12
Modelo no acotado

2.21
$x_1^* = 5, x_2^* = 7.5$; $z^* = 320$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.22
$y_1^* = 1, y_2^* = 1, y_3 = 0$; $w^* = 120$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.23
$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3^* = \frac{5}{3}$; $w^* = 50$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.24
$x_1^* = \frac{5}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0$; $z^* = -60$, sí se cumple el teorema fuerte de la dualidad.

2.25
$c_1 \in (2, +\infty)$, $b_1 \in [20, +\infty)$

2.26
$c_2 \in [\frac{9}{2}, +\infty)$, $b_2 \in [20, +\infty)$

2.27
$c_2 \in [\frac{9}{2}, +\infty)$, $b_2 \in [20, +\infty)$

2.28
$c_1 \in [\frac{-5}{3}, +\infty)$, $b_1 \in [12, +\infty)$

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
Definición de variables
COA_i = costo de operación anual de la ciudad *i*.
X_{ij} = unidades obtenidas por los factores,
donde *i*= 1…5 (ciudad) y *j*= factor intangible 1…4

Función objetivo
Mín *f*(o) = COA_i

$COA_i = MO_i + T_i + IL_i + P_i + O_i$
MO = mano de obra
T= transportación
IL = impuestos locales
P = poder
O= otros

$F_{ii} = \text{sum}_{j=1}^{4} X_{ij}$ para *i*=1…5

Mín *f*(o) = F_i + COA

Fi = factor intangible

Restricciones
COA = 0, COA ≥ 0
Fi = 0, *Fi* ≥ 0

3.2
Variables
X_{ij} = Número de embarques del país de origen y al país destino *j*.
donde *i*=1…3 (L.A., Chicago y Dallas o Knox Ville),
j=1…3 (Denver, Seattle y Nueva York)

d = demanda
cap = capacidad
c = costo de embarque

Función objetivo
Mín *f*(o)= costo

Costo =
$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}C_{ij} + 100{,}000\sum_{j=1}^{3} X3_j + 80{,}000\sum_{j=1}^{3} X4_j$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geq D_j \qquad \text{para j=1…3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq Cap_i D_j \qquad \text{para i=1…4}$$

El modelo me va a decir el número de embarques a enviar de la planta origen al país destino, claro minimizando el costo tanto de manufactura como de envío.

No sería proporcionado la planta a abrir.

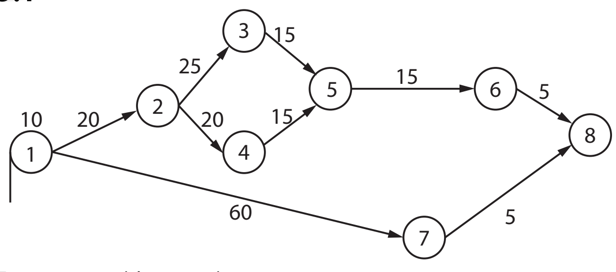
Restricciones
X_{ij} ≥ 0 y entero
D_i ≥ 0 se usa o no planta "y"
D_i ≤ 1
D_i ent
D_1 = 1
D_2 = 2

3.3
Variable
X_{ij} = número de cargas del almacén *i* a la locación *j*
donde *i* = 1…5 *j* = 1…2
CM = costo por milla
NM = número de millas

Función objetivo
Mín F (o) = costo
$$\text{costo} = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}cm_{ij}nm_{ij}l_j \text{ para } j = 1\ldots2$$

Restricciones
L_j ≥ 0 abro o no la locación
L_j ≤1
L_j = ent

3.4



La ruta crítica sería:
1-2-3-5-6-8 = 10+20+25+15+15+5= 80 días.
Se consideraría ruta crítica debido a que la dirección seleccionada y recorrida por la misma se caracteriza

por su gran extensión y demora del punto llamado inicio a otro punto llamado destino, consumiendo un gran número de días que en determinado momento al convertirse en términos monetarios, afectaría económicamente a la empresa.

Variables

E_i = tiempo más temprano de la actividad *i*, donde *i* = 1…6
L_i = tiempo más tarde de la actividad *i*, donde *i* = 1…6
P_i = tiempo normal de proceso de la actividad *i*.
V_i = costo adicional por la reducción de la actividad *i*.
R_i = tiempo real de la actividad *i*.
M_i = el tiempo más temprano de propuesta de la actividad *i*.

E1 = 10	L8 = E8
E2 ≥ E1 + 20	L7 <= L8 – 5
E3 ≥ E2 + 25	L6 <= L8 – 5
E4 ≥ E2 + 20	L5 <= L6 – 15
E5 ≥ E3 + 15	L4 <= L5 – 15
E5 ≥ E4 + 15	L3 <= L5 – 15
E6 ≥ E5 + 15	L2 <= L4 – 20
E7 ≥ E1 + 60	L2 <= L3 – 25
E8 ≥ E6 + 5	L1 <= L7 – 60
E8 ≥ E7 + 5	L1 <= L2 – 20

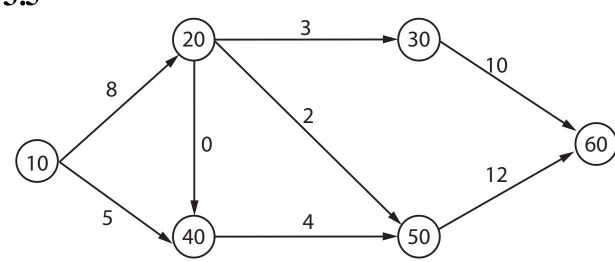
Ruta Crítica → $L_i - E_i = 0$ la ruta crítica se dará cuando el tiempo más tarde de la actividad *i* menos el tiempo más temprano de actividad *i* sea igual a cero; es decir, sin holgura.

Función objetivo
Máx F(o) = 1000 (e8 - m8) - v_i (p_i - r_i)

Restricciones
$E_i \geq 0$ donde *i* = 1…6
E_i = ent
$L_i \geq 0$ donde *i* = 1…6
L_i = ent

Restricciones respecto a los días a reducir:
$R_1 \geq 5$
$R_2 \geq 5$
$R_3 \geq 10$
$R_4 \geq 5$
$R_5 \geq 2$
$R_6 \geq 5$
$R_7 \geq 15$
$R_8 \geq 1$

3.5



La ruta crítica sería: 10-20-50-60
8+2+12= 22 días.

Definición de variables
E_i = tiempo más temprano de la actividad *i*, donde *i* = 10…60
L_i = tiempo más tarde de la actividad *i*, donde *i* = 10…60
H_i = tiempo de holgura de la actividad *i*, donde *i* =10…60

E10 = 0	L60 = E60
E20 ≥ E10 + 8	L50 ≤ L60 – 12
E30 ≥ E20 + 3	L40 ≤ L50 – 4
E40 ≥ E10 + 5	L40 ≤ L20 – 0
E40 ≥ E20 + 0	L30 ≤ L60 – 10
E50 ≥ E20 + 0	L20 ≤ L40 – 0
E50 ≥ E40 + 4	L20 ≤ L30 – 3
E60 ≥ E30 + 10	L10 ≤ L40 – 5
E60 ≥ E50 + 12	L10 ≤ L20 – 8

Ruta crítica $L_i - E_i = 0$ cuando el tiempo de holgura sea cero.

tiempo de holgura: $H_i = L_i - E_i$
h50 = l50 – e50

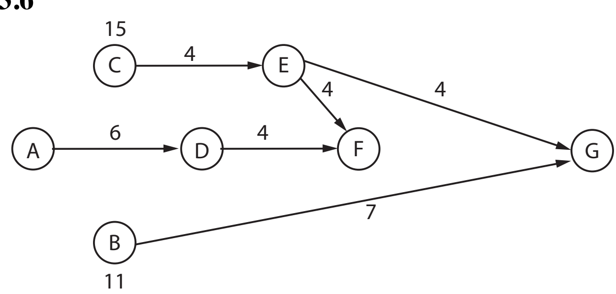
Se considera como tiempo de holgura al intervalo de tiempo existente entre una actividad y otra.

Función objetivo
Mín F(o) = e60

Restricciones
$E_i \geq 0$ donde *i* = 10…60
E_i = ent
$L_i \geq 0$ donde *i* = 10…60
L_i = ent



3.6



La ruta crítica sería → a-d-f-e-g = 6+6+4+4+4= 24 días.

E_i = tiempo más temprano de la actividad i, donde i = a…g
L_i = tiempo más tarde de la actividad i, donde i = a…g
H_i = tiempo de holgura de la actividad i, donde i =a…g
P_i = tiempo normal de proceso de la actividad i, donde i =a…g
V_i = costo adicional por la reducción de la actividad i, donde i =a…g
R_i = tiempo real de la actividad i, donde i =a…g

EA = 0	LG = EG
EB = 11	LG ≤ LE – 4
EC = 13	LG ≤ LB – 7
ED ≥ EA + 6	LF ≤ LE – 4
EE ≥ EC + 4	LF ≤ LD – 4
EF ≥ ED + 4	LE ≤ LC – 4
EF ≥ EE + 4	LD ≤ LF – 4
EG ≥ EB + 7	LC = 13
EG ≥ EE + 4	LB = 11
	LA ≤ LD – 6

Ruta crítica → $L_i - E_i = 0$ cuando el tiempo de holgura sea cero.
Tiempo de holgura = $H_i = L_i - E_i$

Función objetivo
Mín F(o) = E_g
Costo por reducción: $E_i (P_i - R_i)$

Restricciones
$E_i \geq 0$ donde i = a…g
E_i = ent

$L_i \geq 0$ donde i = a…g
L_i = Ent

RA ≥ 3
RB ≥ 1
RC ≥ 2
RD ≥ 0
RE ≥ 1
RF ≥ 1
RG ≥ 2

3.7

Definición de variables
I = planta= 1…3
J = centro de distribución= 1…4
C_i = capacidad de producción en la planta i
S_i = costo de ordenar para la planta i
D_j = demanda del centro de distribución j
G = costo de distribución de la planta i al distribuidor j
X_{ij} = unidades a enviar de la planta i al distribuidor j

$\sum_{j=1}^{4} g_{ij}x_{ij} + s_i$ para i = 1...3 costo de distribución de la planta i al distribuidor j

Función objetivo
Minimizar los costos de distribución totales

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4}\left(g_{ij}x_{ij}\right)+s_i\right)$$

Restricciones

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq c_i \qquad i = 1...3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq d_i \qquad j = 1...4$$

Asuma que los costos de producción unitarios, excluyendo los costos de setup son los mismos en todas las plantas.

$X_{ij} \geq 0$ # unidades a enviar desde planta i hasta cd. j
ent.
i= 1…3
j= 1…4



Mín 750X11 + 1000X12 + 800X13 + 900X14 + 650X21 + 950X22 + 1250X23 + 500X24 + 800X31 + 525X32 + 675X33 + 775X34 + 20000y1 + 15000y2 + 12000y3

Restricciones

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 55$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 50$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 30$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 20$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 15$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 30$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 35$
$y_1 - X_{11} - X_{12} - X_{13} - X_{14} \leq 0$
$y2 - X_{21} - X_{22} - X_{23} - X_{24} \leq 0$
$y3 - X_{31} - X_{32} - X_{33} - X_{34} \leq 0$
$100{,}000_{y1} - X_{11} - X_{12} - X_{13} - X_{14} \geq 0$
$100{,}000_{y2} - X_{21} - X_{22} - X_{23} - X_{24} \geq 0$
$100{,}000_{y3} - X_{31} - X_{32} - X_{33} - X_{34} \geq 0$

3.8

Definición de variables

I= capítulo = 1…10
R_i = % de examen del capítulo *i*
I_i =inversión del espacio del capítulo *i*
E =espacion total= 93.5" cuadradas
X_i = variable binaria que determina si se incluye o no las notas del capítulo *i*

$X_i \geq 0$ 1 si se incluyen notas del capítulo
≤ 1 0 no se incluyen notas del capítulo
X_i = ent

Función objetivo

Maximizar el % del resumen para el examen

$$\sum_{i=1}^{10} x_i r_i$$

Restricciones

$$\sum_{i=1}^{10} x_i i_i \leq e$$

$X_2 + X_3 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 3$
$X_4 \leq X_5$
max $5X_1 + 10X_2 + 15X_3 + 10X_4 + 10X_5 + 5X_6 + 20X_7 + 5X_8 + 15X_9 + 5X_{10}$

Restricciones

$X_2 + X_3 + X_7 + X_8 + X_9 \geq 3$
$10X_1 + 18X_2 + 22X_3 + 16X_4 + 14X_5 + 20X_6 + 32X_7 + 12X_8 + 12X_9 + 10X_{10} \leq 93.5$
$X_5 - X_4 \leq 0$

3.9

Función objetivo

Mín $100Y_{11} + 200Y_{12} + 300Y_{13} + 350Y_{21} + 60Y_{22} + 100Y_{23}$

Restricciones

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 35$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 30$
$X_{11} + X_{21} \geq 20$
$X_{12} + X_{22} \geq 15$
$X_{13} + X_{23} \geq 30$
$y_{11} - X_{11} \leq 0$
$y_{12} - X_{12} \leq 0$
$y_{13} - X_{13} \leq 0$
$y_{21} - X_{21} \leq 0$
$y_{22} - X_{22} \leq 0$
$y_{23} - X_{23} \leq 0$
$10{,}000Y_{11} - X_{11} \geq 0$
$10000y_{12} - X_{12} \geq 0$
$10000y_{13} - X_{13} \geq 0$
$10000y_{21} - X_{21} \geq 0$
$10000y_{22} - X_{22} \geq 0$
$10000y_{23} - X_{23} \geq 0$

3.10

Función objetivo

F.O. –≥ 3 4
Máx sum(sum(X_{ij}*(g_{ij} -r_i*a_{ij})))
$i = 1$ $j = 1$

Restricciones

4
Sum (*aij*) ≤ d*i* para *i* = 1…3
j = 1

3.11

Este problema parece ser muy similar al problema de transportación estándar discutido en el capítulo 3 y 6 excepto que los costos de localización deben ser considerados, en este problema no nos son dados la lista de suministros y las demandas a satisfacer para usar el mismo costo total de las rutas.



En cambio, podemos escoger las localizaciones para usarlas como puntos de almacenamiento y el costo asociado con la elección de cada localización. Si el monto es importante, será enviado desde el almacén a cualquier destino diferente al del dummy el entero costo de localización deberá ser pagado. Hay que notar que la capacidad para las bodegas es suficiente ya que no todas las bodegas pueden ser usadas para satisfacer la demanda total del cliente. De hecho, esta compañía es de Nueva York, el almacén puede manejar toda la demanda por sí sola.

El objetivo es minimizar la suma de transportación y los costos de localización escogiendo una bodega o una de combinación de bodegas y rutas que vayan del almacén hacia los clientes.

Problemas de este tipo son un caso especial de los problemas de carga fija discutidos anteriormente, el de este caso es un tipo de problema de localización de almacén normalmente se resuelven de manera similar a los problemas de transportación, difieren de en que no todas las localizaciones posibles pueden ser pueden ser usadas.

El último costo alternativo deberá ser usado por una sola localización para servir a todos los puntos de la demanda. Particularmente si un costo grande de localización está asociado con cada punto de suministro. Problemas de este tipo normalmente son llamados problemas de localización de almacén y son un tipo de un largo grupo e problemas conocidos como problemas de localización. La fórmula matemática de los problemas de localización de almacén es una combinación de problemas de cargas fijas y problemas de transportación.

N = número de clientes o puntos de demanda.
M = numero de localizaciones de almacenes a considerar
S_i = capacidad del almacén "i"
D_j = demanda del cliente "j"
C_{ij} = costo de transportación por unidad para el almacén i y el cliente *j*.
F_i = costo de localización para el almacén *i*.
X_{ij} = cantidad comprada desde el almacén *i* para el cliente *j*.

Y_i = vale 1 si cualquier cantidad es comprada del punto de compra y 0 si no se compra.

El modelo general para los problemas de localización debe ser expresado de esta manera.

Función objetivo
Mín $_z$ = sum sum $c_{ij} X_{ij}$ + sum $f_i y_i$

Restricciones
sum $X_{ij} = d_j$
sum $X_{ij} \leq$ si y_i

3.12
Definición de variables
X_{ij} = ventas de la región i del administrador *j*
i = 1 (Bostock), 2 (McMahon), 3 (Miller)
j = 1 (región noreste), 2 (región suroeste)

Función objetivo
Máx X_{ij}

Restricciones
$X_{ij} \geq 0$
X_{ij} = entero
$X_{11} \leq 100$
$X_{12} \leq 95$
$X_{21} \leq 85$
$X_{22} \leq 80$
$X_{31} \leq 85$
$X_{32} \leq 75$

3.13
Evaluación de los resultados
•Se comprará 1 camión para transporte de gasolina.
•Se comprarán 10 camiones para el transporte de mudanzas.
•Se comprará 1 camión para el transporte de productos químicos.
•Maximizando así la ganancia anual de la firma a $122,500

3.14
Evaluación de los resultados
•Se producirán 75 waffleras.
•Se producirán 750 platos.
•No se producirán tostadores.
•El fabricante maximizara su utilidad a $1,875



3.15

Alternativas de corte

Alternativa 1

A	A
A	A
A	A
A	A

Alternativa 2

C	C	B
C	C	B

Alternativa 3

B	B	B	B	B
B	B	B	B	B

Alternativa 4

A	A	
A	A	
C	C	B

•Se utilizaron 313 piezas cortadas de la alternativa 1
•Se utilizaron 200 piezas cortadas de la alternativa 2
•Se utilizaron 80 piezas cortadas de la alternativa 3
•Minimizando así el recorte perdido usando un total de 593 piezas de tamaño estándar.

3.16

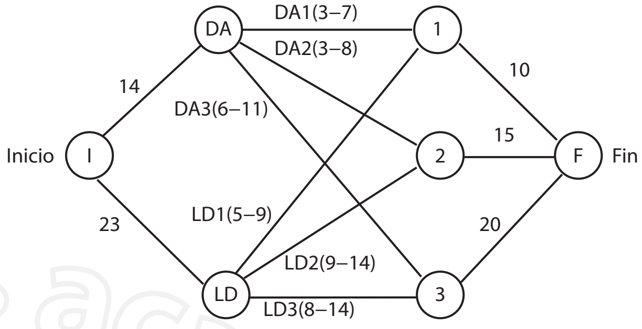
Evaluación de los resultados
•Se utilizaran 37 cortes de la alternativa 1
•Se utilizaran 3 cortes de la alternativa 2
•Se utilizaran 3 cortes de la alternativa 4
•Se utilizaran 72 cortes de la alternativa 7
•Minimizando así el recorte perdido usando 115 rollos de tamaño estándar

3.17

Evaluación de los resultados
•Se producirán 750 productos tipo a en el primer periodo en tiempo normal.
•Se producirán 1,500 productos tipo a en el segundo periodo en tiempo normal.
•No se producirán en tiempo extra ningún producto tipo "a".
•Se producirán 250 productos tipo b en el primer periodo tiempo normal.
•Se producirán 200 productos tipo b en el segundo período en tiempo normal.
•Se producirán 400 productos tipo b en el segundo periodo en tiempo extra.
•La planta manufacturera minimizará así el costo de producción a $88,500.

3.18

Red que representa el problema de operadoras



Evaluación de los resultados "l"
•En el turno 1 habrá 5 operadoras de asistencia de directorio y 5 de larga distancia.
•En el turno 2 habrá 3 operadoras de asistencia de directorio y 12 de larga distancia.
•En el turno 3 habrá 11 operadoras de asistencia de directorio y 9 de larga distancia.

3.19

Función objetivo

Mín $Xa_1 + Xb_1 + Xc_1 + Xa_2 + Xb_2 + Xc_2 + Xa_3 + Xb_3 + Xc_3$

Restricciones

$Xa_1 \geq 0$
$Xa_2 \geq 0$
$Xa_3 \geq 0$
$Xb_1 \geq 0$
$Xb_2 \geq 0$
$Xb_3 \geq 0$
$Xc_1 \geq 0$
$Xc_2 \geq 0$
$Xc_3 \geq 0$
$20\ Xa_1 + 40\ Xb_1 + 75\ Xc_1 \geq 2{,}500$
$16\ Xa_2 + 32\ Xb_2 + 60\ Xc_2 \geq 4{,}000$
$28\ Xa_3 + 56\ Xb_3 + 105\ Xc_3 \geq 3{,}500$

3.20

Definición de variables

X_i = número de empleados en el horario *i*

Función objetivo

Mín F(o) = número mínimo de empleados requeridos



Restricciones
$X_i \geq 0$
X_i = ent
i = 4 hr

$X_1 \leq 3$
$X_2 \leq 5$
$X_3 \leq 10$
$X_4 \leq 6$
$X_5 \leq 10$
$X_6 \leq 8$

3.21
Definición de variables
X_{ij} = cantidad de maestros "i" que forman el comité del depto. "j"
$X_{ij} \geq 0$ no se escoge
$X_{ij} \leq 1$ si se escoge
X_{ij} = Ent
C_{ij} = costo del maestro "i" del depto. "j"

"i" =1..8
"j" =1..8

Restricciones
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 = 4$
$X_{14}, X_{24}, X_{34}, X_{44}, X_{54}, X_{64}, X_{74}, X_{84} =\geq 5$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} + X_{65} + X_{75} + X_{85} \leq 100$
$X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{42}, X_{52}, X_{62}, X_{72}, X_{82} \leq 1$
$X_1 + X_7 = 0$
$X_n \geq 0$

Función objetivo

$$Mín \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{ij} c_{ij}$$

3.22
Función objetivo
Mín $2.5X_1 + 2.6X_2 + 3X_3 + 4.1X_4 + 4X_5 + 3.6X_6 + 4.5X_7 + 3.1X_8$

Restricciones
$X_1 + X_2 \geq 500$
$X_3 + X_4 \geq 300$
$X_5 + X_6 \geq 1000$
$X_7 + X_8 \geq 200$
$.1X_1 + .1X_3 + .1X_5 + .1X_7 \leq 120$
$.2X_1 + .2X_3 + .2X_5 + .2X_7 \leq 260$
$.11X_1 + .11X_3 + .1X_6 + .1X_8 \leq 140$
$.22X_2 + .22X_4 + .22X_6 + .22X_8 \leq 250$

Mín. costo = costo de embarque + costo de maquinado + costo ensamblado de cada uno de los consumidores

Ejemplo del costo del cliente a para sus productos

costo del producto del consumidor "a" = $2.50X_1 + 5.1X_2$
$1.5X_1 + 4X_2 + .1X_1 (4) + .2X_1 (3) + .11X_2 (4) + .22X_2 (3)$

Solución
$X_1 = 500, X_2 = 0, X_3 = 300, X_4 = 0, X_5 = 64, X_6 = 936, X_7 = 0, X_8 = 200$

Para el cliente "a" se deben de fabricar 500 unidades en la planta 1.
Para el cliente "a" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 2.

Para el cliente "b" se deben de fabricar 300 unidades en la planta 1.
Para el cliente "b" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 2.

Para el cliente "c" se deben de fabricar 64 unidades en la planta 1.
Para el cliente "c" de deben de fabricar 936 unidades en la planta 2.

Para el cliente "d" se deben de fabricar 0 unidades en la planta 1.
Para el cliente "d" se deben de fabricar 200 unidades en la planta 2.



3.23

Variables del modelo

X_t=técnicos capacitados en el mes t (t = 1, 2, 3, 4, 5)
Y_t=técnicos con experiencia al inicio del mes t (t = 1, 2, 3, 4, 5)

Función objetivo

Costo total del trabajo = costo de los que están aprendiendo +costo de los especializados.
$= 1000 * (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5) +$
$2000 * (Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5)$

F.O.
Mín
$1000X_1 + 1000X_2 + 1000X_3 + 1000X_4 + 1000X_5 + 2000Y_1 + 2000Y_2 + 2000Y_3 + 2000Y_4 + 2000Y_5$

Restricciones

El número de técnicos especializados al inicio de enero son 50

$\geq Y_1 = 50$

El número de horas disponibles en cada mes debe de ser mayor o igual a la demanda del mes. El número de horas disponibles igual a número de horas de los técnicos especializados - número de horas dedicadas al aprendiz * número de técnicos que se está capacitando.

$\geq 160Y_1 - 50X_1 \geq 6000$
$160Y_2 - 50X_2 \geq 7000$
$160Y_3 - 50X_3 \geq 8000$
$160Y_4 - 50X_4 \geq 9500$
$160Y_5 - 50X_5 \geq 11000$

Técnicos con experiencia disponibles al inicio del mes t = técnicos con experiencia disponibles al inicio del mes ($t - 1$) + técnicos capacitados durante el mes ($t - 1$) - técnicos con experiencia que dejan el empleo durante el mes ($t - 1$).

$\geq$Para feb. $Y_2 =< Y_1 + X_1 - 0.05Y_1$ ¢ $Y_2 \leq 0.95Y_1 + X_1$
Para mar. $Y_3 =< Y_2 + X_2 - 0.05Y_2$ ¢ $Y_3 \leq 0.95Y_2 + X_2$
Para abr. $Y_4 =< Y_3 + X_3 - 0.05Y_3$ ¢ $Y_4 \leq 0.95Y_3 + X_3$
Para may. $Y_5 =< Y_4 + X_4 - 0.05Y_4$ ¢ $Y_5 \leq 0.95Y_4 + X_4$

Mín
$1000X_1 + 1000X_2 + 1000X_3 + 1000X_4 + 1000X_5 + 2000Y_1 + 2000Y_2 + 2000Y_3 + 2000Y_4 + 2000Y_5$

Sujeto a
$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$
$X_3 \geq 0$
$X_4 \geq 0$
$X_5 \geq 0$
$Y_1 = 50$
$Y_2 \geq 0$
$Y_3 \geq 0$
$Y_4 \geq 0$
$Y_5 \geq 0$
$160Y_1 - 50X_1 \geq 6000$
$160Y_2 - 50X_2 \geq 7000$
$160Y_3 - 50X_3 \geq 8000$
$160Y_4 - 50X_4 \geq 9500$
$160Y_5 - 50X_5 \geq 11000$
$0.95Y_1 + X_1 - Y_2 \geq 0$
$0.95Y_2 + X_2 - Y_3 \geq 0$
$0.95Y_3 + X_3 - Y_4 \geq 0$
$0.95Y_4 + X_4 - Y_5 \geq 0$

3.24

Variables

Z = costo total de distribución
X_{ij} = unidades enviadas de la planta i al distribuidor j
C_{ij} = costo de distribución de la planta i al distribuidor j
Z_{ik} = unidades enviadas de la planta i al cliente k
C_{ik} = costo de distribución de la planta i al cliente k
Y_{jk} = unidades enviadas del distribuidor j al cliente k
C_{jk} = costo de distribución del distribuidor j al cliente k
N_i = capacidad mensual de producción de la planta i
M_j = capacidad mensual de almacenamiento y distribución del almacén j
R_k = demanda mensual del cliente k

Función objetivo

Minimizar z = suma $(i, j) c_{ij}\ x_{ij}$ + suma $(i, k)\ c_{ik}\ z_{ik}$ + suma $(j, k)\ c_{jk}\ y_{jk}$

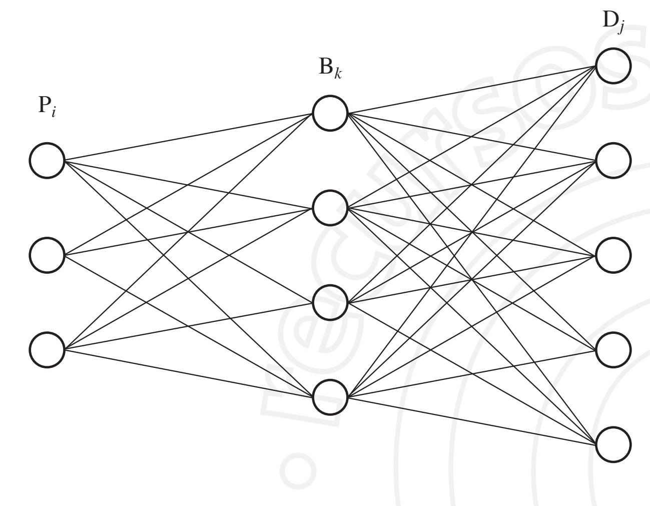


Restricciones

Suma $(j = 1\ldots m)\ x_{ij}$ + suma $(k = 1\ldots r)\ z_{jk} \leq n_i$ para $i = 1\ldots n$
Suma $(i = 1\ldots n)\ x_{ij} \leq m_j$ para $j = 1\ldots m$
Suma $(i = 1\ldots n)\ x_{ij} \geq$ suma $(k = 1\ldots r)\ y_{ij}$ para $j = 1\ldots m$
Suma $(i = 1\ldots n)\ z_{ik}$ + suma $(j = 1\ldots m)\ y_{jk} \geq r_k$ para $k = 1\ldots r$
$X_{ij}, z_{ij}, y_{jk} \geq 0$ y entero

3.25

Modelo de transbordo



Variables de entrada

C_i = Capacidad de la Planta i.
D_j = Demanda de la Distribuidora j.
E_{ik} = Costo de distribución de la planta i a la bodega k.
F_{kj} = Costo de distribución de la bodega k a la distribuidora j.
I_k = Inventario Inicial por bodega.

Variables de salida

X_{ik} = Cantidad de unidades que van de la planta i a la bodega k.
Y_{kj} = Cantidad de unidades que van de la bodega i a la distribuidora j.
G_k = Inventario real final en cada bodega.

Restricciones

Capacidad de la planta

$$\sum_{k=1}^{4} Xik \leq Ci \quad \text{para } i = 1,2,3.$$

Satisfacer la demanda.

$$\sum_{k=1}^{4} Ykj \leq Dj \quad \text{para } j = 1,2,3,4,5.$$

Balance de los nodos.

$$Ik + \sum_{j=1}^{3} Xik = Gk + \sum_{j=1}^{5} Ykj \quad \text{para } k = 1,2,3,4.$$

Función objetivo:

$$\text{F.O.} \rightarrow \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}(Xik)(Eik) + \sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(Ykj)(Fkj)$$

Declaración de variables

Gk, Xik, Ykj ≥ 0

3.26

La solución se basará en saber cuántos técnicos de tiempo completo se contratarán cada día, esto implica que ese día empiezan a trabajar y lo harán por los siguientes 4 días. De estos técnicos también hay que saber cuántos de ellos trabajarán día extra. También hay que saber por cada día cuantos trabajadores de medio tiempo se contratarán, y como con los trabajadores de tiempo completo ese día empiezan a trabajar y lo harán por los siguientes 4 días. Con estos datos se podrá calcular cuántos trabajadores equivalentes a tiempo completo habrá en cada día, y así poder plantear las restricciones necesarias como la cantidad de trabajadores en cada día.

Variables de entrada

HTC: Horas de tiempo completo por día.
HTM: Horas de medio tiempo por día.
NMEi: Cantidad mínima de empleados equivalentes a tiempo completo en el día i.
CT: Costo por hora de técnico de tiempo completo.
CTE: Costo por hora extra de técnico de tiempo completo.
CM: Costo por hora de técnico de medio tiempo.
PMC: Porcentaje máximo permitido de técnicos de medio tiempo con respecto a los técnicos de tiempo completo.

Variables de salida

TC_i: Técnicos de tiempo completo contratados el día i.
TCE_i: Técnicos de tiempo completo contratados el día i que trabajarán día extra.
TM_i: Técnicos de medio tiempo contratados el día i.

Variables de paso
TTC_i: Técnicos de tiempo completo que estarán trabajando el día *i*. (Este día no es su día extra).
TTE_i: Técnicos de tiempo completo que estarán trabajando el día *i*. (Este día si es su día extra).
TTM_i: Técnicos de medio tiempo que estarán trabajando el día *i*.

$TTC_1 = TC_4 + TC_5 + TC_6 + TC_7 + TC_1$
$TTC_2 = TC_5 + TC_6 + TC_7 + TC_1 + TC_2$
$TTC_3 = TC_6 + TC_7 + TC_1 + TC_2 + TC_3$
$TTC_4 = TC_7 + TC_1 + TC_2 + TC_3 + TC_4$
$TTC_5 = TC_1 + TC_2 + TC_3 + TC_4 + TC_5$
$TTC_6 = TC_2 + TC_3 + TC_4 + TC_5 + TC_6$
$TTC_7 = TC_3 + TC_4 + TC_5 + TC_6 + TC_7$

$TTE_1 = TCE_4 + TCE_5 + TCE_6 + TCE_7 + TCE_1$
$TTE_2 = TCE_5 + TCE_6 + TCE_7 + TCE_1 + TCE_2$
$TTE_3 = TCE_6 + TCE_7 + TCE_1 + TCE_2 + TCE_3$
$TTE_4 = TCE_7 + TCE_1 + TCE_2 + TCE_3 + TCE_4$
$TTE_5 = TCE_1 + TCE_2 + TCE_3 + TCE_4 + TCE_5$
$TTE_6 = TCE_2 + TCE_3 + TCE_4 + TCE_5 + TCE_6$
$TTE_7 = TCE_3 + TCE_4 + TCE_5 + TCE_6 + TCE_7$

$TTM_1 = TM_4 + TM_5 + TM_6 + TM_7 + TM_1$
$TTM_2 = TM_5 + TM_6 + TM_7 + TM_1 + TM_2$
$TTM_3 = TM_6 + TM_7 + TM_1 + TM_2 + TM_3$
$TTM_4 = TM_7 + TM_1 + TM_2 + TM_3 + TM_4$
$TTM_5 = TM_1 + TM_2 + TM_3 + TM_4 + TM_5$
$TTM_6 = TM_2 + TM_3 + TM_4 + TM_5 + TM_6$
$TTM_7 = TM_3 + TM_4 + TM_5 + TM_6 + TM_7$

Restricciones
$TCE_i \leq TC_i$

La cantidad de técnicos de tiempo completo contratados el día i debe ser menor o igual a la cantidad de técnicos de tiempo completo contratados el día i.

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} TMi}{\sum_{i=1}^{7} TCi} \leq PMC$$

La relación entre técnicos de medio tiempo contratados debe ser cuando mucho del PMC% en relación con los técnicos de tiempo completo contratados.

$HTC * (TTCi + TTEi) + HTM * TTMi \geq HTC * MEi$

La cantidad de técnicos trabajando equivalentes a tiempo completo trabajando el día i debe cubrir el mínimo de técnicos requeridos el día i.

Función objetivo

$$F.O. \rightarrow \sum_{i=1}^{7} (CT)(TTCi)(HTC) + (CTE)(TTEi)(HTC) + (CM)(TTMi)(HTM)$$

Min
Minimizar el costo de contratación de técnicos de tiempo completo y medio tiempo semanalmente.

3.27
La solución de este modelo se basará en conocer la cantidad de toneladas de carbonato de sodio que cada una de las plantas surtirán a cada una de las vidrieras (si es que se surte). Esto basado en tres cosas: 1. Ganancias debidas a las toneladas de carbonato de sodio surtidas a cada una de las vidrieras. 2. Gastos generados por transportar las toneladas de carbonato de sodio de cada planta a cada vidriera surtida. 3. Gastos debidos a la inversión de la construcción de cada planta a construir (se considerará que una planta se debe construir si está en la solución del modelo surta al menos a una vidriera).

Por último, en la nota se considera que se prorratee el costo de construcción de cada planta en 5 años, y como los datos que se proveen son de naturaleza mensual, se hará un análisis de este modelo de manera mensual.

Se les asignará un orden a cada planta y vidriera:

Orden	Planta	Vidriera
1	Guadalajara	Toluca
2	México	México
3	Querétaro	Querétaro
4	Veracruz	Guadalajara
5	Monterrey	Monterrey



Variables de entrada
CTO_i = Costo de construir la planta i (CTO5 = 0)
CAP_i = Capacidad mensual de la planta i.
D_j = Demanda mensual de la Vidriera j.
U_j = Utilidad por tonelada de carbonato de sodio de vendérsela a la vidriera j.
T_{ij} = Costo de transporte por tonelada de carbonato de sodio de la planta i a la vidriera j.

Variable de salida
X_{ij} = Toneladas de carbonato de sodio que surtirá por mes la planta i a la vidriera j.

Variables de paso

$V_j = \sum_{i=1}^{5} Xij$ para $j = 1\ldots5$

La cantidad de toneladas de carbonato de sodio que recibe cada vidriera.

$Y_j = \sum_{j=1}^{5} Xij$ para $i = 1\ldots5$

La cantidad de toneladas de carbonato de sodio que vende cada planta.

$Z_i \geq 0$
≤ 1 (0 si $Y_i = 0$, y 1 si $Y_i = 1$)
ent
Esta variable nos indica si la planta i se construye ($Z_i = 0$ No se construye la planta i, $Z_i = 1$ si se construye la planta i).

Restricciones
$V_j \geq D_j$
La cantidad de toneladas recibidas por cada vidriera de cubrir la demanda mensual de éstas.

$Y_i \leq CAP_i$
La cantidad de toneladas que vende cada planta no debe exceder su capacidad de producción.

Y_i		
LI	LS	
0	0	$Z_i = 0$
1	CAP_i	$Z_i = 1$

$Z_i \leq Y_i$
$CAP_i * Z_i \geq Y_i$
Condiciones para el cálculo de Z_i (Se construye o no la planta i).

Función objetivo

$$\text{F.O.} \rightarrow \sum_{j=1}^{5} WjUj - \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} XijTij - \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{CTOi}{60}\right)Zi$$

Max

3.28
Variables

$$Xi = \begin{cases} 1 & \text{Si la estación es construida en la ciudad } i \\ 0 & \text{La estación no es construida} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Restricciones

R1) $X_1 + X_2 \geq 1$ (Ciudad 1)
R2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 2)
R3) $X_3 + X_4 \geq 1$ (Ciudad 3)
R4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$ (Ciudad 4)
R5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 5)
R6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$ (Ciudad 6)

Función objetivo
$Z_{mín} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

MÍN $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$
Sujeto a
R1) $X_1 + X_2 \geq 1$
R2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$
R3) $X_3 + X_4 \geq 1$
R4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$
R5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$
R6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$



3.29

X11 = Trabajo tipo 1 en máquina 1
X12 = Trabajo tipo 1 en máquina 2
X13 = Trabajo tipo 1 en máquina 3
X21 = Trabajo tipo 2 en máquina 1
X22 = Trabajo tipo 2 en máquina 2
X23 = Trabajo tipo 2 en máquina 3
X31 = Trabajo tipo 3 en máquina 1
X32 = Trabajo tipo 3 en máquina 2
X33 = Trabajo tipo 3 en máquina 3
X41 = Trabajo tipo 4 en máquina 1
X42 = Trabajo tipo 4 en máquina 2
X43 = Trabajo tipo 4 en máquina 3
X51 = Trabajo tipo 5 en máquina 1
X52 = Trabajo tipo 5 en máquina 2
X53 = Trabajo tipo 5 en máquina 3

MAX X11 + X12 + X13 + X21 + X22 + X23 + X31 + X32 + X33 + X41 + X42 + X43 + X51 + X52 + X53

Sujeto a

$8\,X11 + 18\,X21 + 12\,X31 + 15\,X41 + 8\,X51 \le 72$
$12\,X12 + 16\,X22 + 8\,X32 + 12\,X42 + 5\,X52 \le 72$
$25\,X13 + 16\,X23 + 18\,X33 + 7\,X43 + 13\,X53 \le 144$
$X11 + X12 + X13 \le 6$
$X21 + X22 + X23 \le 12$
$X31 + X32 + X33 \le 14$
$X41 + X42 + X43 \le 15$
$X51 + X52 + X53 \le 22$

Resultado

X11 = 5	X12 = 0	X13 = 0
X21 = 0	X22 = 0	X23 = 0
X31 = 0	X32 = 0	X33 = 0
X41 = 0	X42 = 0	X43 = 15
X51 = 4	X52 = 14	X53 = 3

F.O.: = 41 trabajos

3.30

La lectora 1 se asignará a cheques
La lectora 2 se asignará a notas
La lectora 3 se asignará a procesamiento de datos
La lectora 4 se asignará a ahorros
La lectora 5 se asignará a cambios

MÁX

60X1 – 150X2 + 30X3 + 50X4 + 70X6 + 60X7 + 40X8 + 50X9 + 30X11 – 150X12 + 10X13 + 30X14 + 40X16 – 150X17 150X18 + 60X19 + 40X21 + 70X22 + 50X23 + 80X24

Sujeto a

X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 1
X6 + X7 + X8 + X9 + X10 = 1
X11 + X12 + X13 + X14 + X15 = 1
X16 + X17 + X18 + X19 + X20 = 1
X21 + X23 + X22 + X24 + X25 = 1
X1 + X6 + X11 + X16 + X21 = 1
X2 + X7 + X12 + X17 + X22 = 1
X3 + X8 + X13 + X18 + X23 = 1
X4 + X9 + X19 + X14 + X24 = 1
X5 + X10 + X15 + X20 + X25 = 1

3.31

Los programas de turnos son independientes, la unión de dependientes, los llama basados en el programa de 5 días consecutivos y 8 horas por día de trabajo y solamente a empleados de tiempo completo.

El turno 1 descansa los días: lunes y martes
El turno 2 descansa los días: martes y miércoles
El turno 3 descansa los días: miércoles y jueves
El turno 4 descansa los días: jueves y viernes
El turno 5 descansa los días: viernes y sábado
El turno 6 descansa los días: sábado y domingo
El turno 7 descansa los días: domingo y lunes

El mínimo número de obreros requerido es de 18
Se requieren 3 obreros para el turno 1 matutino
Se requieren 2 obreros para el turno 2 matutino
Se requieren 3 obreros para el turno 3 matutino
Se requieren 1 obrero para el turno 4 matutino
Se requieren 1 obrero para el turno 7 matutino
Se requieren 4 obreros para el turno 2 vespertino
Se requieren 2 obreros para el turno 4 vespertino
Se requieren 1 obrero para el turno 6 vespertino
Se requieren 1 obrero para el turno 7 vespertino

MÍN X11 + X12 + X21 + X22 + X31 + X32 + X41 + X42 + X51 + X52 + X61 + X62 + X71 + X72



Sujeto a
X21 + X31 + X41 + X51 + X61 ≥ 6
X22 + X32 + X42 + X52 + X62 ≥ 5
X31 + X41 + X51 + X61 + X71 ≥ 5
X32 + X42 + X52 + X62 + X72 ≥ 4
X11 + X41 + X51 + X61 + X71 ≥ 5
X12 + X42 + X52 + X62 + X72 ≥ 4
X11 + X21 + X51 + X61 + X71 ≥ 6
X12 + X22 + X52 + X62 + X72 ≥ 5
X11 + X21 + X31 + X61 + X71 ≥ 8
X12 + X22 + X32 + X62 + X72 ≥ 6
X11 + X21 + X31 + X41 + X51 ≥ 6
X12 + X22 + X32 + X42 + X52 ≥ 4
X11 + X21 + X31 + X41 + X71 ≥ 10
X12 + X22 + X32 + X42 + X72 ≥ 7

3.32
El turno 1 son los empleados que descansan lunes y martes
El turno 2 son los empleados que descansan martes y miércoles
El turno 3 son los empleados que descansan miércoles y jueves
El turno 4 son los empleados que descansan jueves y viernes
El turno 5 son los empleados que descansan viernes y sábado
El turno 6 son los empleados que descansan sábado y lunes

El número mínimo de cajeros requeridos 11

Se requieren 3 empleados en el turno 1
Se requieren 2 empleados en el turno 2
Se requieren 3 empleados en el turno 3
Se requieren 2 empleados en el turno 4
Se requieren 1 empleados en el turno 5
Se requieren 0 empleados en el turno 6

MÍN X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6

Sujeto a
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 10$
$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 4$
$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 \geq 5$
$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 8$
$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 6$
$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 \geq 8$

3.33
X_{ij}= miles de carros SMC distribuidos de la planta *i* al almacén *j*.

MÍN 67 X11 + 16 X12 + 27 X13 + 65 X14 + 46 X15 + 112 X16
+ 58 X21 + 78 X22 + 39 X23 + 4 X24 + 20 X25 + 48 X26
+ 17 X31 + 96 X32 + 57 X33 + 20 X34 + 30 X35 + 32 X36
+ 15 X41 + 54 X42 + 22 X43 + 42 X44 + 27 X45 + 93 X46
+ 37 X51 + 66 X52 + 28 X53 + 20 X54 + 12 X55 + 72 X56
+ 306 Y1 + 140 Y2 + 200 Y3 + 164 Y4 + 88 Y5

Sujeto a
X11 + X12 + X13 + X14 + X15 + X16 - 18 Y1 ≤ 0
X21 + X22 + X23 + X24 + X25 + X26 - 24 Y2 ≤ 0
X31 + X32 + X33 + X34 + X35 + X36 - 27 Y3 ≤ 0
X41 + X42 + X43 + X44 + X45 + X46 - 22 Y4 ≤ 0
X51 + X52 + X53 + X54 + X55 + X56 - 31 Y5 ≤ 0
X11 + X21 + X31 + X41 + X51 = 10
X12 + X22 + X32 + X42 + X52 = 8
X13 + X23 + X33 + X43 + X53 = 12
X14 + X24 + X34 + X44 + X54 = 6
X15 + X25 + X35 + X45 + X55 = 7
X16 + X26 + X36 + X46 + X56 = 11

Resultado

X11 = 0	X21 = 0	X31 = 10
X12 = 8	X22 = 0	X32 = 0
X13 = 10	X23 = 0	X33 = 0
X14 = 0	X24 = 0	X34 = 0
X15 = 0	X25 = 0	X35 = 0
X16 = 0	X26 = 0	X36 = 11
X41 = 0	X51 = 0	Y1 = 1
X42 = 0	X52 = 0	Y2 = 0
X43 = 0	X53 = 2	Y3 = 1
X44 = 0	X54 = 6	Y4 = 0
X45 = 0	X55 = 7	Y5 = 1
X46 = 0	X56 = 0	

F.O.: = 1774.00



3.34

Máx $50X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 120X_4 + 110X_5 + 40X_6 + 75X_7$

Sujeto a:

$X_1 + X_4 + X_5 \geq 2$
$X_2 + X_3 \leq 1$
$X_6 + X_7 = 1$

$480X_1 + 540X_2 + 680X_3 + 1000X_4 + 700X_5 + 510X_6 + 900X_7 \leq 3000$

Resultado

$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$X_3 = 1$
$X_4 = 1$
$X_5 = 1$
$X_6 = 1$
$X_7 = 0$
F.O: = 360.00

3.35

Variables de salida

X_j = Número de unidades a producir en un horario regular en el mes j.
Y_j = Número de unidades a producir en un tiempo extra en el mes j.
Z_j = Inventario al final del mes j.
donde $j = 1,\ldots,4$ (pero Z_4 no existe ya que no hay inv. en el mes 4)

MÍN $0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 7Y_1 + 7Y_2 + 7Y_3 + 7Y_4 + 3Z_1 + 3Z_2 + 3Z_3$

ST

$X_1 + Y_1 - Z_1 = 1800$
$X_2 + Y_2 + Z_1 - Z_2 = 2200$
$X_3 + Y_3 + Z_2 - Z_3 = 3400$
$X_4 + Y_4 + Z_3 = 2800$
$X_1 \leq 2400$
$X_2 \leq 2400$
$X_3 \leq 2400$
$X_4 \leq 2400$
$Y_1 \leq 800$
$Y_2 \leq 800$
$Y_3 \leq 800$
$Y_4 \leq 800$

Circuito No. 1: 11:00 – 17:00 \
Circuito No. 2: 4:00 – 18:00 Demanda = D_i
Circuito No. 3. 10:00 – 18:00 /

Tiempo circuito No. 1: 2 hr (ida y vuelta)
Tiempo circuito No. 2: 3 hr (ida y vuelta)
Tiempo circuito No. 3: 1 hr (ida y vuelta)

Los camiones son de 50 toneladas cada uno.

¿Cuántos camiones se requieren?
$X_{i,\,i+2}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 1
$Y_{i,\,i+3}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 2
$Z_{i,\,i+1}$ = en que horario inicia y termina un ciclo en el circuito 3

C1 = camiones en el circuito 1
C2 = camiones en el circuito 2
C3 = camiones en el circuito 3

MIN $C1X_{1113} + C1X_{1214} + C1X_{1315} + C1X_{1416} + C1X_{1517} + C2Y_{0407} + C2Y_{0508} + C2Y_{0609} + C2Y_{0710} + C2Y_{0811} + C2Y_{0912} + C2Y_{1013} + C2Y_{1114} + C2Y_{1215} + C2Y_{1316} + C2Y_{1417} + C2Y_{1518} + C3Z_{1011} + C3Z_{1112} + C3Z_{1213} + C3Z_{1314} + C3Z_{1415} + C3Z_{1516} + C3Z_{1617} + C3Z_{1718}$

Sujeto a:

$D1 \geq 170$
$D2 \geq 290$
$D3 \geq 340$
$C1 \leq 5$
$C2 \leq 12$
$C3 \leq 8$
$C1X_{1113} + C1X_{1315} = 1$
$C1X_{1315} + C1X_{1517} = 1$
$C1X_{1214} + C1X_{1416} = 1$
$C1X_{1113} + C1X_{1315} + C1X_{1517} = 1$
$C2Y_{0407} + C2Y_{0710} + C2Y_{1013} + C2Y_{1316} = 1$
$C2Y_{0508} + C2Y_{0811} + C2Y_{1114} + C2Y_{1417} = 1$
$C2Y_{0609} + C2Y_{0912} + C2Y_{1215} + C2Y_{1518} = 1$
$C3Z_{1011} + C3Z_{1112} + C3Z_{1213} + C3Z_{1314} + C3Z_{1415} + C3Z_{1516} + C3Z_{1617} + C3Z_{1718} = 1$
$50X_{1113} + 50X_{1214} + 50X_{1315} + 50X_{1416} + 50X_{1517} - D_1 = 0$



$50Y_{0407} + 50Y_{0508} + 50Y_{0609} + 50Y_{0710} + 50Y_{0811} +$
$50Y_{0912} + 50Y_{1013} + 50Y_{1114} + 50Y_{1215} + 50Y_{1316} +$
$50Y_{1417} + 50Y_{1518} - D_2 = 0$
$50Z_{1011} + 50Z_{1112} + 50Z_{1213} + 50Z_{1314} + 50Z_{1415} +$
$50Z_{1516} + 50Z_{1617} + 50Z_{1718} - D_3 = 0$

Resultado

$X_{1113} = 1$	$Y_{0407} = 1$	$Z_{1011} = 1$
$X_{1214} = 0$	$Y_{0508} = 1$	$Z_{1112} = 0$
$X_{1315} = 1$	$Y_{0609} = 1$	$Z_{1213} = 1$
$X_{1416} = 1$	$Y_{0710} = 1$	$Z_{1314} = 1$
$X_{1517} = 1$	$Y_{0811} = 1$	$Z_{1415} = 1$
	$Y_{0912} = 0$	$Z_{1516} = 1$
	$Y_{1013} = 0$	$Z_{1617} = 1$
	$Y_{1114} = 0$	$Z_{1718} = 1$
	$Y_{1215} = 0$	
	$Y_{1316} = 0$	
	$Y_{1417} = 1$	
	$Y_{1518} = 0$	

F.O: = 6 camiones

3.36
Asuma que este ciclo de requerimientos se repite indefinidamente. El gerente desea encontrar la programación de horarios de empleados que satisfaga los requerimientos a un mínimo costo.

MIN $6x_{11} + 6x_{21} + 6x_{31} + 6x_{41} + 6x_{51} + 6x_{61} + 6x_{71}$

sujeto a:
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} \geq 25$
$X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} \geq 33.334$
$X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} \geq 66.667$
$X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} \geq 50$
$X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 116.667$
$X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} > 50$
$X_{61} + X_{71} + X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \geq 133.334$

Miércoles contratar 99 personas descansan lunes y martes
Viernes contratar 33 personas descansan miércoles y jueves
Sábado contratar 2 personas descansan jueves y viernes

El costo ser de $804.00 suponiendo que se les pague $1.00

3.37
X_{11} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "1"
X_{12} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "2"
X_{13} = Unidades enviadas de la planta "1" al almacén "3"
X_{21} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "1"
X_{22} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "2"
X_{23} = Unidades enviadas de la planta "2" al almacén "3"

MAX $4X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 5X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23}$

Sujeto a:
$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 200$
$X_{11} + X_{21} \leq 150$
$X_{12} + X_{22} \leq 200$
$X_{13} + X_{23} \leq 350$
$X_{11} \geq 0$
$X_{12} \geq 0$
$X_{13} \geq 0$
$X_{21} \geq 0$
$X_{22} \geq 0$
$X_{23} \geq 0$

Resultados
$X_{11} = 0$
$X_{12} = 100$
$X_{13} = 0$
$X_{21} = 150$
$X_{22} = 50$
$X_{23} = 0$
F.O.: = 1400

3.38
Planteamiento
AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 8:00
= 0 No ....
AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 10:00
= 0 No ....
AT = 1 Si hay vuelo a Atlanta a las 12:00
= 0 No ....

LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 8:00
= 0 No ....
LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 10:00
= 0 No ....
LA = 1 Si hay vuelo a Los Ángeles a las 12:00
= 0 No ....



NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 8:00
= 0 No ....
NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 10:00
= 0 No ....
NY = 1 Si hay vuelo a New York a las 12:00
= 0 No ....

PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 8:00
= 0 No ....
PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 10:00
= 0 No ....
PE = 1 Si hay vuelo a Peoria a las 12:00
= 0 No ....

MAX				
	$10\ AT_8$	$+ 9\ AT_{10}$	$+ 8\ AT_{12}$	+
	$11\ LA_8$	$+ 10.5\ LA_{10}$	$+ 9.5\ LA_{12}$	+
	$17\ NY_8$	$+ 16\ NY_{10}$	$+ 15\ NY_{12}$	+
	$8.4\ PE_8$	$+ 2.5\ PE_{10}$	$- 1\ PE_{12}$	

Sujeto a:

$AT_8 + AT_{10} + AT_{12} = 1$
$LA_8 + LA_{10} + LA_{12} = 1$
$NY_8 + NY_{10} + NY_{12} = 1$
$PE_8 + PE_{10} + PE_{12} = 1$
$AT_8 + LA_8 + NY_8 + PE_8 \leq 2$
$AT_{10} + LA_{10} + NY_{10} + PE_{10} \leq 2$
$AT_{12} + LA_{12} + NY_{12} + PE_{12} \leq 2$

Resultados:
$AT_8 = 1$
$LA_{10} = 1$
$NY_{10} = 1$
$PE_8 = 1$
F.O: 44.9 (MIL)

3.40

Planteamiento:
MIN 2X11 + 3X12 + 5X13 +
3X21 + 1X22 + 4X23

Sujeto a
X11 + X21 = 10000
X12 + X22 = 8000
X13 + X23 = 15000
X11 + X12 + X13 <= 20000
X21 + X22 + X23 <= 15000
END

Resultados:
X11 = 10000
X12 = 0
X13 = 8000
X21 = 0
X22 = 8000
X23 = 7000

3.41

Planteamiento
MIN 50 F + 16 P1 + 16 P2 + 16 P3 + 16 P4 + 16 P5

SUBJECT TO

F	+ P1					≥ 10
F	+ P1	+ P2				≥ 12
0.5 F	+ P1	+ P2	+ P3			≥ 14
0.5 F	+ P1	+ P2	+ P3	+ P4		>= 16
F +		P2	+ P3	+ P4	+ P5	≥ 18
F +			P3	+ P4	+ P5	≥ 17
F +				P4	+ P5	≥ 15
F +					P5	≥10

F ≤ 12
4 P1 + 4 P2 + 4 P3 + 4 P4 + 4 P5 ≤ 56
4(P1 + P2 + P3 + P4 + P5) ≤ 0.5(10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 17 + 15 + 10)

Resultados
F = 10
P2 = 2
P3 = 7
P4 = 2
P5 = 3
F.O: $724.00

Iris Martínez, Gastón Vértiz, Fabián López, Guillermo Jiménez, Luis Moncayo



A continuación se presentan algunas respuestas a los problemas para resolver.

4.1
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 5;\ Z^* = 40$

4.2
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 4;\ Z^* = 30$

4.3
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ W^* = 12$

4.4

$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ W^* = 12$

4.5
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 4$

4.6
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ W_1^* = 0;\ W_2^* = 1;\ Z^* = -4$

4.7
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 7;\ X_3^* = 8;\ Z^* = 37$

4.8
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 4;\ Z^* = 58$

4.9
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 3;\ X_4^* = 1;\ Z^* = 11$

4.10
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 0;\ X_4^* = 0;\ Z^* = 6$

4.11
$X_1^* = 4;\ X_2^* = 2;\ Z^* = 340$

4.12
$X_1^* = 7;\ X_2^* = 3;\ Z^* = 130$

4.13
$X_1^* = 30;\ X_2^* = 0;\ W^* = 60$

4.14
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 3$

4.15
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 0;\ Z^* = 100$

4.16
$X_1^* = 0;\ X_2^* = 2;\ X_3^* = 2;\ Z^* = 70$

4.17
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 0;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 0;\ X_6^* = 0;$
$X_7^* = 0;\ X_8^* = 0;\ X_9^* = 0;\ X_{10}^* = 0;\ X_{11}^* = 0;\ X_{12}^* = 1;\ W^* = 2$

4.18
$X_1^* = 2;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 0;\ Z^* = 18$

4.19
$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ Z^* = 8$

4.20

$X_1^* = 1;\ X_2^* = 0;\ X_3^* = 1;\ X_4^* = 0;\ W^* = 2$

4.21
$X_{AD}^* = 200;\ X_{AE}^* = 50;\ X_{AF}^* = 50;\ X_{BE}^* = 150;$
$X_{CF}^* = 250;\ W^* = 3200$

$X_{AF}^* = 25;\ X_{BE}^* = 30;\ X_{BF}^* = 10;\ X_{CD}^* = 30;\ W^* = 230$

4.23
$X_{AE}^* = 35;\ X_{BD}^* = 30;\ X_{BE}^* = 5;\ X_{BF}^* = 25;$
$X_{CE}^* = 5;\ X_{CG}^* = 20;\ W^* = 3100$

4.24
$X_{AD}^* = 20;\ X_{AE}^* = 5;\ X_{AF}^* = 15;\ X_{BE}^* = 20;$
$X_{BG}^* = 5;\ X_{CG}^* = 35;\ W^* = 415$



4.25
$X^*_{AE} = 30;\ X^*_{BE} = 15;\ X^*_{BH} = 25;\ X^*_{CE} = 5;\ X^*_{CI} = 45;$
$X^*_{DE} = 15;\ X^*_{DF} = 15;\ X^*_{DG} = 30;\ W^* = 585$

4.26
$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{BD} = 5;\ X^*_{BE} = 15;\ X^*_{BG} = 10;\ X^*_{CF} = 10;$
$X^*_{CG} = 6;\ X^*_{CH} = 24;\ W^* = 185$

4.27
$X^*_{AI} = 100;\ X^*_{BH} = 40;\ X^*_{BJ} = 160;\ X^*_{CE} = 150;$
$X^*_{CH} = 80;\ X^*_{CI} = 70;\ X^*_{DF} = 175;\ X^*_{DG} = 225;$
$W^* = 22395$

4.28
$X^*_{AE} = 30;\ X^*_{AG} = 45;\ X^*_{BF} = 15;\ X^*_{BI} = 70;$
$X^*_{CH} = 55;\ X^*_{DF} = 25;\ X^*_{DG} = 5;\ X^*_{DH} = 5;\ W^* = 3100$

4.29
$X^*_{AG} = 10;\ X^*_{BF} = 14;\ X^*_{BG} = 6;\ X^*_{CD} = 12;\ X^*_{CE} = 18;$
$W^* = 190$

4.30
$X^*_{AF} = 15;\ X^*_{BD} = 10;\ X^*_{BF} = 10;\ X^*_{CE} = 20;\ X^*_{CF} = 2;$
$X^*_{CG} = 1;\ W^* = 179$

4.31
$X^*_{AF} = 200;\ X^*_{AH} = 30;\ X^*_{BH} = 350;\ X^*_{CG} = 300;$
$X^*_{CH} = 20;\ X^*_{DE} = 100;\ W^* = 32140$

4.32
$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{BD} = 5;\ X^*_{BF} = 25;\ X^*_{CE} = 38;\ X^*_{CF} = 2;$
$W^* = 2874$

4.33
$X^*_{AD} = 350;\ X^*_{AE} = 150;\ X^*_{BD} = 100;\ X^*_{BF} = 200;$
$X^*_{BG} = 300;\ X^*_{CE} = 400;\ W^* = 77850$

4.34
$X^*_{AD} = 80;\ X^*_{AG} = 70;\ X^*_{BE} = 90;\ X^*_{BG} = 20;$
$X^*_{CF} = 100;\ X^*_{CG} = 20;\ W^* = 12650$

4.35
$X^*_{AD} = 20;\ X^*_{AG} = 13;\ X^*_{BF} = 1;\ X^*_{BG} = 27;$
$X^*_{CE} = 30;\ X^*_{CF} = 9;\ W^* = 1098$

4.36
$X^*_{AG} = 200;\ X^*_{AH} = 100;\ X^*_{BF} = 400;\ X^*_{CF} = 50;$
$X^*_{CH} = 30;\ X^*_{CI} = 420;\ X^*_{DE} = 350;\ X^*_{DH} = 250;$
$W^* = 64710$

4.37
$X^*_{AE} = 10;\ X^*_{AI} = 15;\ X^*_{BF} = 35;\ X^*_{CG} = 23;\ X^*_{CH} = 22;$
$X^*_{DF} = 5;\ X^*_{DG} = 27;\ X^*_{DI} = 23;\ W^* = 6109$

4.38
$X^*_{AE} = 10;\ X^*_{AG} = 15;\ X^*_{BH} = 35;\ X^*_{CF} = 20;$
$X^*_{CG} = 15;\ X^*_{CH} = 5;\ X^*_{CI} = 2;\ X^*_{DI} = 48;\ W^* = 513$

4.39
$X^*_{1B} = 3;\ X^*_{2A} = 3;\ X^*_{3D} = 5;\ X^*_{4C} = 4;\ W^* = 15$

4.40
$X^*_{1B} = 61;\ X^*_{2C} = 62;\ X^*_{3D} = 63;\ X^*_{4E} = 87;$
$X^*_{5F} = 50;\ X^*_{6A} = 36;\ W^* = 359$

4.41
$X^*_{1F} = 6;\ X^*_{2B} = 4;\ X^*_{3C} = 29;\ X^*_{4E} = 10;\ X^*_{5D} = 5$
$X^*_{6H} = 6;\ X^*_{7A} = 55;\ X^*_{8G} = 0;\ W^* = 115$

4.42
$X^*_{1B} = 2;\ X^*_{2D} = 0;\ X^*_{3A} = 0;\ X^*_{4C} = 0;\ W^* = 2$

4.43
$X^*_{1A} = 2;\ X^*_{2C} = 5;\ X^*_{3B} = 6;\ X^*_{4D} = 2;\ W^* = 15$



4.44

$X_{1C}^{*}=9;\ X_{2D}^{*}=4;\ X_{3A}^{*}=2;\ X_{4B}^{*}=2;\ W^{*}=17$

4.46

$X_{1A}^{*}=2;\ X_{2D}^{*}=2;\ X_{3G}^{*}=1;\ X_{4E}^{*}=2;\ X_{5C}^{*}=2;$

$X_{6B}^{*}=2;\ X_{7F}^{*}=2;\ W^{*}=13$

4.47

$X_{1E}^{*}=60;\ X_{2B}^{*}=120;\ X_{3C}^{*}=140;\ X_{4A}^{*}=50;$

$X_{5D}^{*}=75;\ W^{*}=445$

4.48

$X_{1A}^{*}=8;\ X_{2C}^{*}=15;\ X_{3B}^{*}=14;\ X_{4D}^{*}=10;\ W^{*}=47$

4.49

$X_{1D}^{*}=3;\ X_{2C}^{*}=2;\ X_{3B}^{*}=4;\ X_{4A}^{*}=2;\ W^{*}=11$

4.50

$X_{1D}^{*}=14;\ X_{2E}^{*}=11;\ X_{3A}^{*}=10;\ X_{4B}^{*}=12;$

$X_{5C}^{*}=11;\ X_{6F}^{*}=14;\ W^{*}=72$

4.51

$X_{1D}^{*}=1;\ X_{2A}^{*}=2;\ X_{3B}^{*}=2;\ X_{4E}^{*}=1;\ X_{5C}^{*}=5;$

$W^{*}=11$

4.52

$X_{1E}^{*}=1;\ X_{2D}^{*}=5;\ X_{3B}^{*}=3;\ X_{4C}^{*}=2;\ X_{5A}^{*}=4;$

$W^{*}=15$

4.53

$X_{1B}^{*}=3;\ X_{2A}^{*}=1;\ X_{3D}^{*}=3;\ X_{4C}^{*}=1;\ W^{*}=8$

4.54

$X_{1D}^{*}=2;\ X_{2C}^{*}=2;\ X_{3A}^{*}=9;\ X_{4B}^{*}=3;\ W^{*}=16$

4.55

$X_{1C}^{*}=25;\ X_{2D}^{*}=25;\ X_{3B}^{*}=14;\ X_{4A}^{*}=24;\ W^{*}=88$

4.56

$X_{1A}^{*}=11;\ X_{2C}^{*}=13;\ X_{3D}^{*}=13;\ X_{4B}^{*}=14;\ W^{*}=51$

4.57

$X_{1D}^{*}=60;\ X_{2B}^{*}=140;\ X_{3A}^{*}=60;\ X_{4C}^{*}=80;$

$W^{*}=340$

4.58

$X_{1A}^{*}=15;\ X_{2B}^{*}=15;\ X_{3C}^{*}=30;\ X_{4D}^{*}=55;\ W^{*}=115$



A continuación se presentan algunas respuestas a los problemas para resolver.

5.1
La asignación por el método de la esquina noroeste se muestra en la Tabla 5.7 y el costo inicial es de 65’500 + 500M. Después de cuatro iteraciones se llega a la solución óptima de $60’000 con el siguiente plan de asignación: de las plantas mandar toda su capacidad al almacén 1 y de este almacén surtir a las cuatro concesionarias.

5.2
Con el método MAV se llega en 1 iteración, con el del método noroeste en 3 y con el método del costo mínimo en 2.

5.3
a) Costo de $15’650

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			300	350	650
Nodo ficticio				200	200
Demanda	200	250	400	550	

b) solución óptima $14450

	Veracruz	Ciudad de México	Cuernavaca	Tlaxcala	Oferta
Puebla	200	250	100		550
Satélite			100	550	650
Nodo ficticio			200		200
Demanda	200	250	400	550	

5.4
La solución generada por MAV es la solución óptima. Si creamos la solución inicial con el método de la esquina noroeste tenemos que hacer una iteración más para llegar a la solución óptima.

5.5
Tenemos que multiplicar $0.1/ton*km por cada uno de las distancias de la tabla para que nos dé como resultado $/ton. La solución inicial por el método de la esquina noroestes nos da un costo de $8'765

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400	50		450
Plantación 2		400		400
Plantación 3		75	225	300
Demanda	400	525	225	

Después de dos iteraciones se llega al siguiente plan de distribución

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Oferta
Plantación 1	400		50	450
Plantación 2		225	175	400
Plantación 3		300		300
Demanda	400	525	225	

El costo de este plan de distribución es de $4'977.5. Los máximos beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 4977.5 = **$3'397.5**

5.6
El costo de distribución óptimo es $6'115. Los beneficios son 450(9.5) + 6.5(400) + 5(300) – 6'115 = **$2'260**. No le conviene, las ganancias son menores que en el problema 5.5.

5.7
En este caso los orígenes y destinos son los periodos (P)rimavera, (V)erano, (O)toño e (I)nvierno. La oferta es la capacidad de producción en cada uno de los periodos y la demanda es el pronóstico hecho por el depto. de mercadotecnia. Existe un costo unitario de producción para cada periodo y un costo de almacenaje de $10. La tabla inicial es:

	P	V	O	I	Oferta
P	80	90	100	110	30'000
V	M	85	95	105	25'000
O	M	M	82	92	30'000
I	M	M	M	86	25'000
Demanda	25'000 – 10'000	40'000	30'000	15'000+10'000	



Por ejemplo, en primavera se van a producir 30’000 unidades si las consumimos en el mismo periodo nos cuentan \$80, si consumimos \$20’000 unidades en primavera y 10’000 en veranos, éstas nos constarán \$80 más \$10 pesos por almacenarlas un periodo. El costo de M significa que no podemos producir para periodos anteriores.

	P	V	O	I	Oferta
P	15’000	15’000			30’000
V		25’000	0	0	25’000
O			30’000		30’000
I				25’000	25’000
Demanda	15’000	40’000	30’000	25’000	

5.8

La solución inicial generada por MAV
La costo del plan de producción es \$9’285’000, la solución óptima es la generada por MAV. Por lo tanto la utilidad es 120(15’000)+140(40’000)+125(30’000)+105(25000)-9’285’000= \$4’490’000

5.9

*a)*Min 400xp1p2 + 400xp2p1 + 400xp1c + 900xp2c + 900xp1w1 + 100xcw2 + 200xw2w1 + 900w1w2

```
      Subject to
        xp1w1 + xp1c + + xp1p2 – xp2p1 = 50
        xp2p1 + xp2c – xp1p2 = 40
        xcw2 – xp1c – xp2c = 0
        xw1w2 – xw2w1 – xp1w1 = -45
        xw2w1 – xw1w2 – xcw2 = -45
    end
```

*b)*Se deben de agregar una demanda de 10 en el almacén C -- restricción 3 en el problema en a). Sin embargo el problema no tiene solución ya que se debería incrementar la oferta en 10 unidades.

xcw2 – xp1c – xp2c = -10

end

c) al modelo en a) anexar la siguiente restricción **xp1c <= 20**

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	0	400	400	900	M	50 + B
P2	400	0	900	M	M	40+B
C	M	M	0	M	100	B
W1	M	M	M	0	900	B
W2	M	M	M	200	0	B
Demanda	B	B	B	45	45	



5.10
Construimos por MAV la solución inicial
Si B = 90, después de una iteración encontramos la solución óptima con un costo de $ 70’000 y el siguiente plan de distribución

	P1	P2	c	W1	W2	Oferta
P1	50		90	0		140
P2	40	90				130
C					90	90
W1				90		90
W2				45	45	90
Demanda	90	90	90	135	135	

5.11
La solución es:

```
        LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      80000.00
   VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
      XP1P2         0.000000       700.000000
      XP2P1         0.000000       100.000000
       XP1C        20.000000         0.000000
       XP2C        40.000000         0.000000
      XP1W1        30.000000         0.000000
       XCW2        60.000000         0.000000
      XW2W1        15.000000         0.000000
       W1W2         0.000000       900.000000
      XW1W2         0.000000       200.000000


 ROW   SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
   2)        0.000000        300.000000
   3)        0.000000          0.000000
   4)        0.000000        900.000000
   5)        0.000000       1200.000000
   6)        0.000000       1000.000000
   7)        0.000000        200.000000
```

Si restringimos el número de unidades por la ruta xp1c el costo se incremente en $10’000 ($80’000-$70’000)



5.13
Primero la demanda de plantas no es suficiente para satisfacer la demanda. Por lo tanto el plan de distribución tiene un costo de $2’490’000. La demanda de 3 no es atendida y solo se le llevaran 500 unidades a 4

	1	2	3	4	
A	1800	300		500	2600
B		1800			1800
Ficticio			**550**	**1250**	**1800**
Demanda	1800	2100	550	1750	

5.14
No porque el costo aumentaría a $3’960’000

5.15
Costo = $8’000, con el siguiente plan de distribución

	C	D	E	
A		100		100
B	100		100	200
Demanda	100	100	100	

5.16
El costo se mantiene igual ($5’000) mandando 100 unidades de A a E, 200 de B a C y 100 de C a E.

5.17
La oferta no es suficiente para los requerimientos de Vuelo-Mex. De tal manera que el costo mínimo de $8’525’000 se obtiene cuando se compran 110’000 litros a D para abastecer a B; 220’000 litros a E y se abastece A (165’000) y B (55’000); 330’000 litros a F y se abastece a C; y 385’000 a G para abastecer a A(110’000) y C(330’000). No se surten 385’000 litros a B.

5.19
a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	Demanda
1	0	M	M	1.5	1.2	M	M	M	450+B
2	M	0	M	1.3	0.6	M	M	M	700+B
3	M	M	0	2	0.7	M	M	M	500+B
4	M	M	M	0	M	1	0.6	0.7	B
5	M	M	M	0.2	0	0.8	0.4	0.9	B
6	M	M	M	M	M	0	0.3	0.8	B
7	M	M	M	M	M	M	0	0.4	B
8	M	M	M	M	M	0.8	M	0	B
Oferta	B	B	B	B	B	550+B	500+B	600+B	



b) Min 1.5P1D4 + 1.2P1D5 + 1.3P2D4 + 0.6P2D5 + 2P3D4 + 0.7P3D5 +

D4C6 + 0.6D4C7 + 0.7D4C8 + 0.2D5D4 + 0.8D5C6 + 0.4D5C7 + 0.9D5C8 +

0.3C6C7 + 0.4C7C8 + 0.8C6C8 + 0.8C8C6

```
    Subject to

  P1D5 + P1D4 = 450
  P2D4 + P2D5 = 700
  P3D4 + P3D5 = 500

  D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = 0
  D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = 0

  C6C7 + C6C8 - D4C6 - D5C6 = - 550
  C7C8 - D4C8 - D5C8 = -500
  C8C6 - D4C8 - D5C8 - C6C8 = - 600

End
```

c) $2430

d) D4C6 + D4C7 + D4C8 - P1D4 - P2D4 - P3D4 = -100

D5D4 + D5C6 + D5C7 + D5C8 - P1D5 - P2D5 - P3D5 = -100